This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

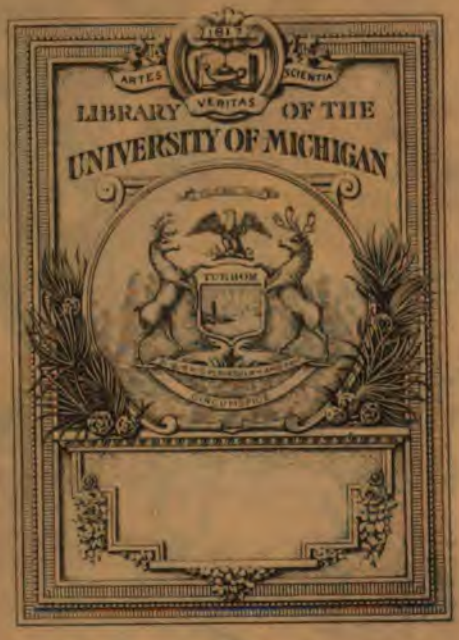
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

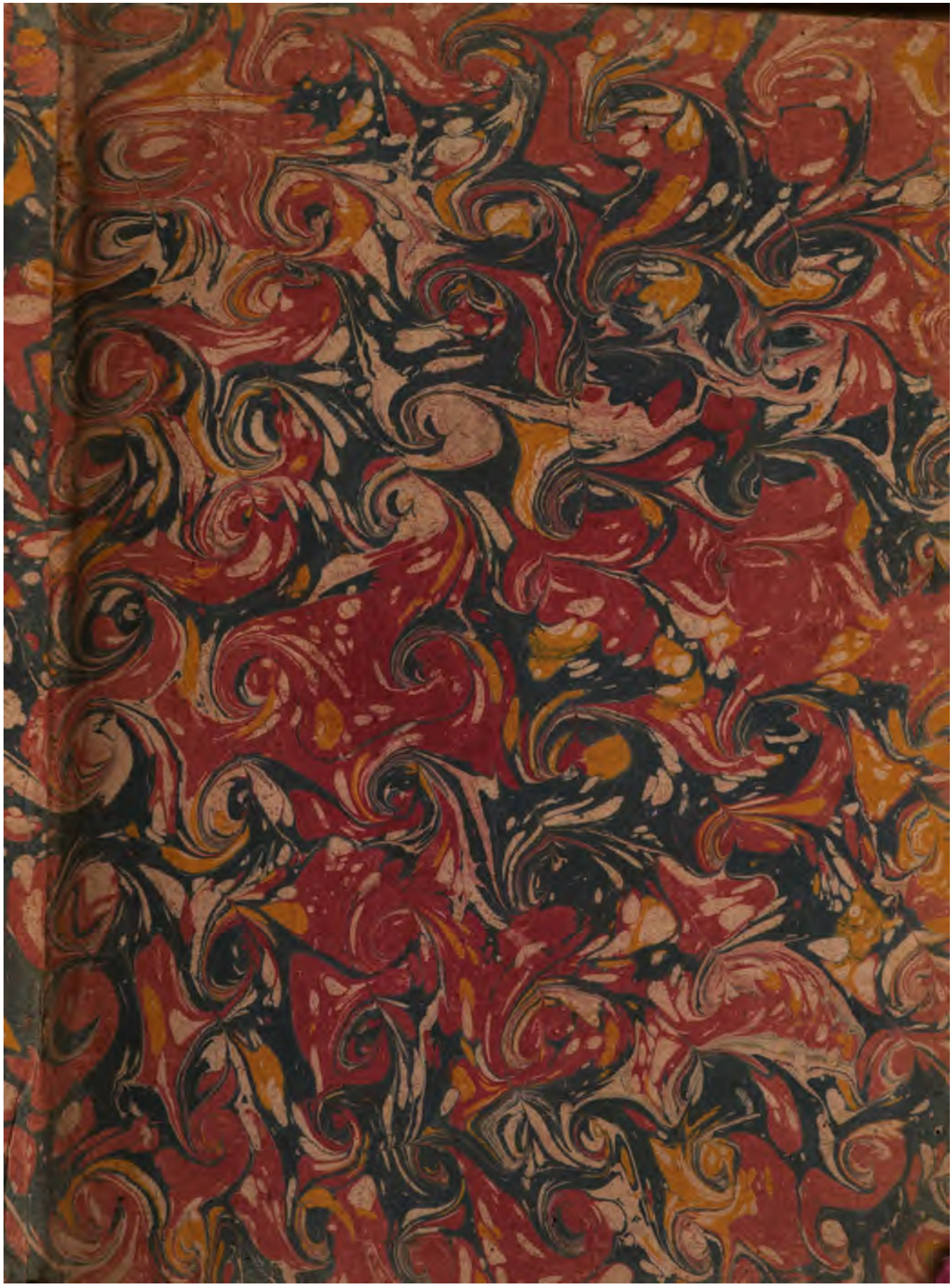
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TURRIM



QH
35
.G967a

(14) R 1441.5.1

APPLICATION
DE L'ALGEBRE
A LA GEOMETRIE,
OU
METHODE
DE DE'MONSTRER PAR L'ALGEBRE,
les Theorêmes de Geometrie, & d'en réſoudre & conſtruire tous les Problêmes.

L'on y a joint une Introduction qui contient les Regles du Calcul Algebrique.

Par Mr NGUISNE'E de l'Academie Royale des Sciences, Profeſſeur Royal de Mathematique, & ancien Ingenieur ordinaire du Roy.

A PARIS,

Chez { JEAN BOUDOT, Imprimeur du Roy & de l'Academie Royale des Sciences, rue ſaint Jacque, au Soleil d'Or.

ET

JACQUE QUILLAU, Impr. Jur. Libr. de l'Univerſité, rue Galande, prés de la rue du Fouarre.

MDCCV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

PREFACE.

IL y a quelques années que l'on écrivit cet Ouvrage en faveur de quelques perſonnes de qualité qui s'appliquent à la Science qu'on y traite. On n'avoit pas alors deſſein de le donner au Public. Mais un de ceux pour qui il a été écrit, l'ayant jugé plus propre que tous les Ouvrages de même nature qui l'ont précedé, pour inſtruire ceux qui veulent s'appliquer aux Mathematiques, & en traiter toutes les parties algebriquement, a bien voulu faire la dépenſe de l'impreſſion par le ſeul motif de leur faire plaiſir.

On y explique le plus ſimplement que l'on peut, les Methodes de démontrer par l'Algebre, tous les Theorêmes de Geometrie, & de réſoudre, & conſtruire tous les Problêmes déterminez & indéterminez, geometriques & méchaniques. En un mot, on explique tous les uſages qu'on peut faire de l'Algebre commune, dans toutes les parties des Mathematiques, pourvû qu'on exprime par des lignes les grandeurs qu'elles ont pour objet; & on ne ſuppoſe pour cela que les ſimples élemens de la Geometrie ordinaire.

L'on y ſuppoſoit auſſi la connoiſſance du Calcul algebrique, parcequ'il ſe trouve expliqué dans pluſieurs Livres imprimez: mais pluſieurs perſonnes ayant crû qu'il ſeroit plus à propos d'en

donner les Régles, & de les joindre à l'Ouvrage en forme d'Introduction, que de renvoyer le Lecteur, qui n'en aura point encore de connoiſſance, à d'autres Ouvrages; on a ſuivi leur avis, & l'on y a ajouté cette Introduction, où l'on a expliqué toutes les operations algebriques, les proprietez des raports, ou fractions, des proportions, & des équations.

Hist. of Sci.
Gonnella
4-6-26
12523

On y a établi un principe general pour démontrer toujours de la même maniere tous les Theorêmes qu'on peut former ſur la grandeur conſiderée generalement; & ce principe eſt le même que l'on trouve auſſi dans la troiſiéme Section de l'Application de l'Algebre à la Geometrie, pour en démontrer les Theorêmes.

L'on trouvera auſſi des Regles particulieres pour multiplier & diviſer, les unes par les autres, les puiſſances qui renferment les mêmes lettres, pour les élever à d'autres puiſſances, & pour en extraire les racines. Ces Regles ne ſeront peut-être pas inutiles pour entendre avec plus de facilité, pluſieurs endroits de l'Excellent Livre de *l'Analyſe des infinimens Petits* de feu *Monſieur le Marquis de l'Hôpital*, que j'ai auſſi eu en vûe dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie. On y trouvera en effet expliquez tous les endroits de l'Analyſe qui dépendent de l'Algebre & de la Geometrie ordinaire; & dans leſquels cet illuſtre Auteur n'a pas jugé à propos de mettre tout au long, ou de pourſuivre

des operations dont il ſuppoſe ſon Lecteur capable.

Je diviſe cet Ouvrage en douze Sections, que j'ai rangées ſelon leur ordre dans la Table qui ſuit, où j'indique ce qui eſt contenu dans chacune. J'ajouterai que dans la premiere Section, j'ai parlé des équations déterminées, & indéterminées, des racines de leurs inconnues, & de leurs uſages; & pour ne pas faire des répetitions inutiles, j'ai crû devoir omettre dans l'Introduction, ce que j'en ai dit en cet endroit. J'ai auſſi mis dans cette Section, des obſervations pour nommer les lignes qui doivent ſervir à la réſolution d'un Problême, pour tirer celles qu'il eſt neceſſaire de tirer, pour trouver plus facilement des équations; & ces obſervations ſont d'un ſi grand ſecours, qu'il eſt neceſſaire de les bien entendre, & même de les apprendre par cœur.

Comme les équations, qui ſervent à conſtruire les Problêmes, en renferment toutes les conditions, & toutes les qualitez, on a accoutumé d'en démontrer la conſtruction par l'Analyſe, en retirant les mêmes équations des proprietez des Courbes qu'on y employe. Mais cette Méthode n'ayant aucune difficulté, j'ai démontré à la maniere des Anciens la conſtruction de la plûpart des Problêmes déterminez que j'ai réſolus, quoiqu'elle ait été tirée de l'Analyſe, afin de faire voir la difference qu'il y a entre l'une & l'autre maniere. Mais quant à la conſtruction

des Problêmes indéterminez, qui n'eſt autre choſe que la deſcription des Courbes dont on a les équations, il n'y a point d'autre voye naturelle pour la démontrer, que l'Analyſe.

Les Sections coniques étant d'un grand uſage dans la Geometrie, j'ai jugé à propos d'en démontrer par l'Analyſe, dans la 4, 5, 6, & 7e Section, les principales proprietez; & principalement celles dont je prévoyois avoir beſoin pour la conſtruction des Problêmes. Je les ai d'abord conſiderées dans le Cone, parcequ'elles y ont pris leur origine & leur nom, & pour faire voir que celles que l'on trouve décrites ſur des Plans dans la 5, 6, & 7e Section, ſont préciſément les mêmes que celles qu'on coupe dans le Cone.

Addition à la page liij *de l'Introduction.*

5°. Il eſt quelquefois à propos, & même neceſſaire, pour rendre plus facilement l'équation qui renferme l'Hypotheſe ſemblable à celle qui renferme la conſequence, de nommer les grandeurs proportionnelles, comme nous avons dit n°. 19, 20, 21 & 22; & de nommer par les mêmes lettres les quantitez inégales qui ne ſont point proportionnelles, en caracteriſant les unes par quelque ſigne, ou par quelque lettre qui faſſe voir leur inégalité. Par exemple, ſi l'on veut démontrer quelque proprieté qui convienne à trois grandeurs differentes A, B, C; ayant nommé A, a, au lieu de nommer B, b; & C, c; on peut nommer B, ma, (m ſignifie *multiple*, ou *ſoûmultiple*), ou $a \pm p$; & C, na (n ſignifie *multiple*, ou *ſoûmultiple*, different de m), ou $a \pm p \pm r$, en ſe ſervant du ſigne $+$, ou $-$, ſelon que les quantitez qu'on veut exprimer, ſont moindres, ou plus grandes que celle qui eſt exprimée par la premiere lettre a.

TABLE DES SECTIONS.

SECTION I. *Où l'on donne les définitions & les principes generaux qui ſeront pour réſoudre les Problèmes, & démontrer les Theorèmes de Geometrie,* page 1

SECTION II. *Où l'on donne la maniere d'exprimer geometriquement les quantitez Algebriques, & de réſoudre les Problèmes ſimples, & plans; ou ce qui eſt la même choſe, de conſtruire les équations déterminées du premier & du ſecond degré,* page 30

SECTION III. *Où l'on donne la Méthode de démontrer les Theorèmes de Geometrie,* page 60

SECTION IV. *Des Sections du Cone, & du Cilindre,* p. 68

SECTION V. *Où l'on démontre les principales proprietez de la parabole, décrite par des points trouvez ſur un Plan.* page 80

SECTION VI. *Où l'on démontre les principales proprietez de l'Ellipſe décrite par des points trouvez ſur un Plan,* page 91

SECTION VII. *Où l'on démontre les principales proprietez de l'Hyperbole décrite par des points trouvez ſur un Plan,* page 116

SECTION VIII. *Où l'on donne la Méthode de réſoudre les Problèmes indéterminez du premier & du ſecond degré, c'eſt-à-dire, de conſtruire les équations à la ligne droite, & aux quatre Courbes du premier genre, qui ſont le Cercle, la Parabole, l'Ellipſe & l'Hyperbole,* page 132

SECTION IX. *Où l'on donne la Méthode de conſtruire les Problèmes ſolides déterminez, par le moyen de deux équations locales, ou indéterminées, lorſque l'une des deux ſe rapporte au cercle, ou y peut être ramenée,* page 187

SECTION X. *Où l'on donne la Méthode de conſtruire les*

TABLE DES SECTIONS.

Problèmes ſolides par le moyen de leurs équations déterminées ; ou ce qui eſt la même choſe, de conſtruire les équations déterminées du troiſiéme, & du quatriéme degré, page 199

SECTION XI. *Où l'on donne la Méthode de réſoudre & de conſtruire les Problèmes indéterminez dont les équations excedent le ſecond degré ; ou ce qui eſt la même choſe, de décrire les Courbes dont ces équations expriment la nature, & de réſoudre, & de conſtruire les Problèmes déterminez, dont les équations excedent le quatriéme degré*, page 210

SECTION XII. *Des courbes mécaniques, ou tranſcendentes, de leur deſcription, & des Problèmes qu'on peut conſtruire par leur moyen*, page 233

AVERTISSEMENT POUR LES CITATIONS.

LES articles ſont marquez par les chiffres Romains I, II, III, *&c.* & les n° par les chiffres Arabes. Par exemple, pour trouver cette citation, art. 4 n°. 6, il faut chercher la page, où l'on trouve le chiffre Romain IV, & enſuite le chiffre Arabe 6, qui n'en eſt pas beaucoup éloigné. Pour une plus grande facilité, voici la Table des articles.

TABLE DES ARTICLES.

ARTICLE I, pag. 1. Art. II, pag. 4. Art. III, pag. 10. Art. IV, pag. 22. Art. V, pag. 30. Art. VI, pag. 35. Art. VII, pag. 38. Art. VIII, pag. 60. Art. IX, pag. 68. Art. X, pag. 80. Art. XI, pag. 85. Art. XII, pag. 91. Art. XIII, pag. 101. Art. XIV, pag. 116. Art. XV, pag. 132. Art. XVI, pag. 141. Art. XVII, pag. 145. Art. XVIII, pag. 148. Art. XIX, pag. 153. Art. XX, pag. 162. Art. XXI, pag. 168. Art. XXII, pag. 175. Art. XXIII, pag. 187. Art. XXIV, pag. 199. Art. XXV, pag. 210. Art. XXVI, pag. 233.

INTRODUCTION.

INTRODUCTION
A
L'APPLICATION DE L'ALGEBRE
A
LA GEOMETRIE.

DE'FINITIONS.

I. L'ALGEBRE eſt l'Art de faire ſur les lettres de l'Alphabet, les operations que l'on fait ſur les nombres, c'eſt-à-dire, l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion & les Extractions de racines.

L'on ſe ſert des lettres de l'Alphabet préferablement à d'autres caracteres arbitraires, dont on pourroit également ſe ſervir, tant parcequ'on les connoît & qu'on écrit avec plus d'habitude que tous autres caracteres, que parceque ces lettres ne ſignifiant rien d'elles mêmes, on peut s'en ſervir pour exprimer tout ce qu'on voudra.

Ce qui fait qu'on ne peut pas tirer le même avantage des caracteres Aritmetiques & des Nombres, que des lettres dans l'Application de l'Algebre à tous ſes uſages, c'eſt, 1°. qu'aprés avoir fait quelques unes des operations dont on vient de parler ſur les lettres, on en connoît non ſeulement le réſultat, mais on connoît & on diſtingue en même temps toutes les quantitez qu'il renferme; ce qui n'eſt point de même dans les réſultats des mémes operations faites ſur les nombres.

2°. Que les quantitez inconnues entrent dans le calcul auſſi-bien que les connues, & que l'on opere avec la même facilité ſur les unes que ſur les autres.

3°. Que les Démonſtrations que l'on fait par le calcul algebrique ſont generales, & qu'on ne ſauroit rien prouver par les nombres que par induction.

C'eſt préciſément en ces trois choſes que conſiſte le grand avantage qu'on tire du calcul algebrique dans ſon application à toutes les parties des Mathematiques, qu'on en démontre tous les Theorêmes, & qu'on en reſout tous les Problêmes avec autant de facilité qu'il y auroit de difficulté à faire les mêmes choſes ſelon la maniere des Anciens.

On s'eſt accoûtumé à employer les premieres lettres de l'Alphabet a, b, c, d, &c. pour exprimer les quantitez connues, & les dernieres $m, n, p, q, r, ſ, t, u, x, y, z$ pour exprimer les inconnues.

1. Outre les lettres qu'on employe dans l'Algebre, il y a encore quelques autres ſignes qui ſervent pour marquer les operations que l'on fait ſur les mêmes lettres. Ce ſigne $+$, ſignifie *plus*, & eſt la marque de l'Addition. Ainſi $a+b$, marque que b eſt ajoutée avec a.

Ce ſigne $-$, ſignifie *moins*, & eſt la marque de la Souſtraction. Ainſi $a-b$, marque que b eſt ſouſtraite de a.

Celui-ci $\times$, ſignifie *fois*, ou *par*, & eſt la marque de la multiplication. Ainſi $a \times b$, marque que a & b, ſont multipliées l'une par l'autre.

On néglige tres-ſouvent ce ſigne, parcequ'on eſt convenu que lorſque deux ou pluſieurs lettres ſont jointes enſemble ſans aucun ſigne qui ſépare ces lettres, où les quantitez qu'elles expriment, ſont multipliées, par exemple ab marque aſſez que a & b ſe multiplient : mais on s'en ſert toujours pour marquer que deux quantitez exprimées par des lettres majuſcules de l'Alphabet ſe multiplient. Ainſi $AB \times CD$, marque que la grandeur exprimée par AB eſt multipliée par la grandeur exprimée par CD. On employe encore le ſigne de multiplication en d'autres ocaſions qu'on trouvera dans la ſuite.

Ce ſigne $=$, ſignifie *égal*, & marque qu'il y a égalité entre les quantitez qui le précedent, & celles qui le ſuivent. Ainſi $a = b$ marque que a eſt égale à b.

Celui-ci $>$ ſignifie *plus grand*. Ainſi $a > b$ marque que a ſurpaſſe b.

Celui-ci $<$ ſignifie *plus petit*. Ainſi $a < b$, marque que a eſt moindre que b.

Celui-ci ∞ ſignifie infini. Ainſi $x = \infty$, marque que x eſt une quantité infiniment grande.

2. Les lettres de l'Alphabet ſont nommées *quantitez algebriques*, lorſqu'on les employe pour exprimer des grandeurs ſur leſquelles on veut operer.

3. Les quantitez algebriques ſont nommées *ſimples*, *incomplexes* ou *monomes*, lorſqu'elles ne ſont point liées enſemble par les ſignes $+$ & $-$; a, ab, $\frac{aa}{b}$ *&c.* ſont des quantitez incomplexes.

4. Elles ſont nommées *compoſées*, ou *complexes*, ou *polynomes*, lorſqu'elles ſont liées enſemble par les ſignes $+$ & $-$; $a+b$, $ab+bb$, $ab-bc+cd$, $\frac{aa+bb}{d}$, ſont des quantitez complexes.

5. Les parties des quantitez complexes diſtinguées par les ſignes $+$ & $-$ ſont nommées *termes*. $ab+bc-cd$, eſt une quantité complexe, qui renferme trois termes, ab, bc & cd. Il y a quelques remarques à faire ſur le mot de *terme* qu'on trouvera ailleurs.

6. Les quantitez complexes qui n'ont que deux termes ſont nommées *binomes*; celles qui en ont trois, *trinomes*, &c.

7. Les quantitez incomplexes qui ſont précedées du ſigne $+$, ou plûtôt qui ne ſont précedées d'aucun ſigne (car les quantitez incomplexes, & les premiers termes des quantitez complexes qui ne ſont précedées d'aucun ſigne ſont ſuppoſées être précedées du ſigne $+$) ſont nommées *poſitives* & celles qui ſont précedées du ſigne $-$, *négatives*; d'où il ſuit que les quantitez complexes ſont

positives, lorſque les termes qui ont le ſigne + ſurpaſſent ceux qui ont le ſigne —; négatives, lorſque les termes précedez du ſigne — ſurpaſſent ceux qui ſont précedez du ſigne +.

8. Les quantitez incomplexes, & les termes des quantitez complexes qui contiennent les mêmes lettres ſont nommées *ſemblables*. 2*abc* & *abc* ſont des quantitez incomplexes ſemblables; 3*aab* — 2*aab* + 4*abb* eſt une quantité complexe qui renferme deux termes ſemblables 3*aab* & — 2*aab*; le troiſiéme terme 4*abb*, n'a point de ſemblable.

9. Pour s'appercevoir plus facilement de la ſimilitude des quantitez algebriques, il faut toujours écrire les premieres lettres de l'Alphabet les premieres, & les autres dans leur ordre, c'eſt-à-dire par exemple, qu'au lieu d'écrire *bac*, ou *cab*, il faut écrire *abc*.

10. Les nombres qui précedent les quantitez algebriques ſont nommez *coefficiens*.

Dans cette quantité *aa* + 3*ab* + 4*bb*, 3 & 4 ſont les coefficiens des termes 3*ab* & 4*bb*. L'on prend l'unité pour coefficient des quantitez qui ne ſont précedées d'aucun nombre, & quoique l'on n'ait point acoutumé de l'écrire, on la doit neanmoins toujours ſuppoſer. Ainſi *aa* doit être regardée comme s'il y avoit 1*aa*.

REDUCTION.

Des quantitez complexes algebriques à leurs plus ſimples expreſſions.

11. IL faut ajouter les coefficiens des termes ſemblables, lorſqu'ils ont le même ſigne + ou —, & donner à la ſomme le même ſigne: & lorſqu'ils ont differens ſignes, il faut ſouſtraire les plus petits coefficiens des plus grands, & donner au reſte le ſigne du plus grand. Ainſi 3*ab* + 2*ab* étant réduite, devient 5*ab*; 4*ac* + 4*ab* — 6*ab* devient 4*ac* — 2*ab*; 3*a* — 5*a* devient — 2*a*; 3*abc* — *abc*, ou 3*abc* — 1*abc*, devient 2*abc*. Il en eſt ainſi des autres.

Dans tous les calculs algebriques, il ne faut jamais laiſſer de termes ſemblables ſans être réduits.

ADDITION

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

12. IL n'y a qu'à les écrire de ſuite, ou au-deſſous les unes des autres, avec leurs ſignes, & réduire enſuite les termes ſemblables, & l'on aura la ſomme des quantitez qu'il falloit ajouter enſemble. Ainſi pour ajouter $3ab - 4bc + 5cd$ avec $2ab - 3cd$, l'on écrira $3ab - 4bc + 5cd + 2ab - 3cd$, qui ſe réduit à $5ab - 4bc + 2cd$. Pour ajouter $5abc - 4bcd$ avec $5abd - 8abc + 6bcd$, l'on écrira $5abc - 4bcd + 5abd - 8abc + 6bcd$, qui ſe réduit à $5abd - 3abc + 2bcd$. Pour ajouter $6a - 3b$ avec $2a - 3b$, l'on écrira $6a - 3b + 2a - 3b$, qui ſe réduit à $8a$. Il en eſt ainſi des autres.

SOUSTRACTION

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

13. IL n'y a qu'à les écrire de ſuite, ou au-deſſous l'une de l'autre en changeant tous les ſignes de celles qui doivent être ſouſtraites; & l'on aura aprés la réduction des termes ſemblables, la difference des quantitez propoſées.

Pour ſouſtraire $3a - 2b + 3c$ de $5a - 3b - 5c$, l'on écrira $5a - 3b - 5c - 3a + 2b - 3c$, qui ſe réduit à $2a - b - 8c$. Pour ſouſtraire $3ab - 2bc + 2cd$ de $5ab - 4bc + 2cd$, l'on écrira $5ab - 4bc + 2cd - 3ab + 2bc - 2cd$, qui ſe réduit à $2ab - 2bc$. Il en eſt ainſi des autres.

MULTIPLICATION

Des quantitez algebriques incomplexes, & de leurs puiſſances.

14. ON eſt convenu que pour multiplier deux ou pluſieurs lettres, il n'y a qu'à les écrire de ſuite ſans aucun ſigne qui les ſepare, & l'on aura le produit cherché. Ainſi pour multiplier a par b, l'on écrira ab. Pour multiplier ab par ac, l'on écrira $aabc$. Il en eſt ainſi des autres.

Il y a ſouvent des nombres, ou coefficiens qui précedent les quantitez algebriques qu'il s'agit de multiplier; il faut auſſi avoir égard à leurs ſignes. Voici la regle qu'il faut ſuivre.

15. On multipliera les cofficiens, en ſuite les lettres & on donnera au produit le ſigne + ſi les deux quantitez ſont précedées du même ſigne + ou —, & on lui donnera le ſigne —, ſi l'une des quantitez eſt précedée du ſigne + & l'autre du ſigne —.

Pour multiplier $3a$ par $2b$, on dira trois fois 2 font 6, a par b fait ou donne, ou eſt égal à ab; ainſi l'on aura $6ab$ pour le produit de $3a \times 2b$. De même $3ab \times -2ab = -6aabb$. $-3ab \times -2cd = +6abcd$. $5ab \times cd$, ou $1cd = 5abcd$. $aab \times abb = aaabbb$, ou a^3b^3; car lorſque la même lettre ſe trouve plus de deux fois dans un produit, on l'écrit ſeulement une fois, & l'on écrit à ſa droite un caractere arithmetique qui exprime combien de fois cette lettre doit être écrite. Ainſi pour $aaaa$, l'on écrira a^4; pour $aaabbb$, l'on a écrit a^3b^3; on peut auſſi pour aa écrire a^2; pour bb, b^2, *&c.*

DE'FINITION.

16. LE caractere arithmetique qui marque combien de fois une lettre doit être écrite dans un produit, eſt nommé *expoſant*. Ainſi dans a^3b^4, 3 eſt le poſant de a, & 4, celui de b; dans a^3b, 3 eſt l'expoſant de a, & 1 l'expoſant de b: car quand une lettre eſt ſeule, ou qu'elle ne doit être écrite qu'une fois dans un produit, on doit ſuppo-

ſer qu'elle a pour expoſant l'unité, quoiqu'on ne l'écrive point. Ainſi a exprime la même choſe que a^1, ou $1a^1$, a^1b, la même que a^1b^1. *&c.*

REMARQUE.

17. DE même que la multiplication de deux lignes droites engendre ou produit un rectangle, ou un quarré, ſi elles ſont égales; la multiplication de trois lignes droites, un parallelepipede, ou ſolide; ou un cube, ſi elles ſont égales: par la même raiſon les Algebriſtes appellent rectangle algebrique, le produit de deux lettres differentes, comme ab; quarré algebrique, le produit d'une lettre par elle-même, comme aa ou a^2; ſolide algebrique, le produit de trois lettres differentes comme abc, ou aab; cube algebrique, le produit d'une lettre multipliée conſecutivement deux fois par elle-même, comme a^3, ou b^3. Mais ils n'en demeurent pas là, & quoiqu'il n'y ait point dans la nature de ſolide qui ait plus de trois dimenſions, ils ne laiſſent pas que d'en imaginer d'algebriques dont le nombre de dimenſions va à l'infini, comme a^3, a^4, a^5, a^6, a^3b, $aabb$, a^3bb, a^3b^3, *&c.* Et ces quantitez algebriques ſont dautant plus compoſées, que le nombre de leurs dimenſions eſt grand; de ſorte que un produit algebrique qui a quatre dimenſions, eſt plus compoſé que celui qui n'en a que trois; celui qui en a trois, eſt plus compoſé que celui qui n'en a que deux, *&c.* Et le nombre des dimenſions d'un produit algebrique eſt égal au nombre d'unitez que contient la ſomme des expoſans des quantitez qui le forment. Par exemple, a^3b eſt un produit de quatre dimenſions, parceque 3 expoſant de a, + 1 expoſant de $b = 4$. a^3b^4 eſt un produit de ſept dimenſions, parceque $3 + 4 = 7$. Il en eſt ainſi des autres.

Ils appellent *puiſſance*, ou degré; le produit d'une quantité algebrique multipliée par elle-même une fois, deux fois, trois fois, & ainſi à l'infini. Ainſi a, ou a^1 eſt le premier degré, ou la premiere puiſſance de a; aa ou a^2,

le ſecond degré, ou la ſeconde puiſſance, ou le quarré de a ; a^2, le troiſiéme degré, ou la troiſiéme puiſſance ou le cube de a; a^4, le quatriéme degré, ou la 4e puiſſance, ou le quarré quarré de a; a^5, le cinquiéme degré, ou la 5e puiſſance, ou le quarré cube de a ; a^6, le ſixiéme degré, ou la ſixiéme puiſſance, ou le cube cube de a; a^7, le ſeptiéme degré, ou la ſeptiéme puiſſance de a, & ainſi à l'infini, d'où l'on voit que les puiſſances tirent leur nom de leurs expoſans.

18. Une puiſſance peut auſſi être regardée comme le produit de deux puiſſances, ou comme la puiſſance d'une autre puiſſance : ainſi a^4 peut être regardée comme le produit de $a^2 \times a^4$, ou comme la ſeconde puiſſance de a^2, ou comme la troiſiéme de a^2.

19. Il y a auſſi des puiſſances faites du produit de deux ou pluſieurs lettres multipliées l'une par l'autre : ainſi $aabb$, eſt la ſeconde puiſſance de ab ; a^3b^6, la troiſiéme puiſſance de abb. Il en eſt ainſi des autres.

DE'FINITION.

20. Si deux quantitez differentes, ou égales forment un produit, ou une puiſſance, ces quantitez ſont nommées *cotez* ou *racines* de ce produit ou de cette puiſſance. Ainſi a & b ſont les côtez, ou les racines de ab; a le côté ou la racine de aa, &c.

FORMATION

Des puiſſances des quantitez incomplexes.

Il eſt évident (n°. 17) que pour élever une quantité incomplexe à une puiſſance donnée, il n'y a qu'à multiplier cette quantité par elle-même autant de fois moins une que l'expoſant de la puiſſance donnée contient d'unitez. Ainſi pour élever ab à la troiſiéme puiſſance, il faut multiplier ab deux fois par elle-même, ce qui donnera a^3b^3. Il en eſt ainſi des autres.

22. D'où il eſt aiſé de voir qu'on peut faire la même choſe d'une maniere plus courte, en multipliant les Expoſans de la grandeur donnée par l'Expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever cette grandeur. Ainſi la 3e puiſſance de ab, ou a^1b^1 eſt $a^{1\times3}b^{1\times3} = a^3b^3$; la 4e puiſſance de a^3 eſt $a^{3\times4} = a^{12}$; la 3e puiſſance de aab^3, ou a^2b^3 eſt $a^{2\times3}b^{3\times3} = a^6b^9$; la 3e puiſſance de $-a$, ou $-a^1$ eſt $-a^{1\times3} = -a^3$; la quatriéme puiſſance de $-a$ ou $-a^1$ eſt $a^{1\times4} = a^4$, & en general la puiſſance n de a^m eſt a^{mn}. La puiſſance n de $-a^m$ eſt $\pm a^{mn}$, ſelon que n ſignifie un nombre pair, ou impair.

23. Il eſt clair (n°. 14, & 15) que pour multiplier un produit ou une puiſſance par un autre produit, ou par une autre puiſſance où ſe trouvent les mêmes lettres, il n'y a qu'à ajouter leurs Expoſans. Ainſi $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$; $a^2b^2 \times a^2b^3 = a^{2+2}b^{3+2} = a^4b^5$; $a^3 \times a^{-5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a_3 \times a^{-3} = a^{3-3} = a^0 = 1$. On verra dans la ſuite pourquoi $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, & pourquoi $a^0 = 1$.

MULTIPLICATION

Des quantitez complexes algebriques, & de la Formation de leurs puiſſances.

RE'GLE.

24. ON multipliera tous les termes de l'une des quantitez par chacun de ceux de l'autre, en obſervant les Régles preſcrites n°. 14, & 15, & l'on aura le produit total que l'on réduira (n°. 11) à ſa plus ſimple expreſſion.

EXEMPLES.

25. SOIT la quantité $A. a + 2b - c.$
à multiplier par $B. 2a + 3b.$

Produits particuliers. $\begin{cases} C. 2aa + 4ab - 2ac. \\ D. \quad + 3ab + 6bb - 3bc. \end{cases}$

Produit total. $E. 2aa + 7ab - 2ac + 6bb - 3bc.$

Le premier terme $2a$ de la quantité B multipliant tous les termes de la quantité A donnera la quantité C.

Le ſecond terme $3b$ de la quantité B, multipliant tous les termes de la quantité A donnera la quantité D ; & ayant fait la réduction des deux quantitez C & D, l'on aura la quantité E qui ſera le produit des deux quantitez A & B. Donc $2a + 2b - c \times 2a + 3b = 2aa + 7ab - 2ac + 6bb - 3bc$.

26. Soit la quantité $A. aa + bb.$
à multiplier par $B. aa - bb.$

Produits particuliers. $\begin{cases} C. a^4 + aabb. \\ D. \quad - aabb + b^4 \end{cases}$

Produit total $E. a^4 - b^4.$

Le premier terme aa de la quantité B, multipliant la quantité A produit la quantité C. Le 2e terme $- bb$ de la quantité B multipliant la quantité A produit la quantité D, & en réduiſant les produits particuliers C & D, l'on a le produit total E. Donc $aa + bb \times aa - bb = a^4 - b^4$.

27. On ſe contente quelquefois pour exprimer la multiplication de deux quantitez complexes, d'écrire entre deux le ſigne de multiplication.

Ainſi pour multiplier $a + b$ par $a - b$, l'on écrit $a + b \times a - b$, ou $a + b \times a - b$. Il en eſt ainſi des autres.

FORMATION

Des puiſſances des quantitez complexes.

28. POUR élever une quantité complexe à une puiſſan-

ce donnée, il faut, comme pour les quantitez incomplexes, la multiplier conſecutivement autant de fois moins une que l'expoſant de la puiſſance donnée contient d'unitez. Ainſi pour élever $a + b$, à la 3e puiſſance, il faut (n°. 24) multiplier $a + b$ par $a + b$, ce qui donne $aa + 2ab + bb$, qui étant encore multipliée par $a + b$, donne $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, qui eſt la 3e puiſſance, ou le cube de $a + b$. Il en eſt ainſi des autres.

On peut abreger l'operation lorſqu'il s'agit d'élever un pobynome au quarré.

29. On écrira le quarré du premier terme + ou — deux fois le rectangle au produit du premier par le ſecond, + le quarré du ſecond ; & ces trois termes ſeront le quarré cherché, ſi c'eſt un binome. Mais ſi c'eſt un trinome, on écrira encore + ou — deux fois le produit des deux premiers par le troiſiéme + le quarré du troiſiéme. Si c'eſt un quadrinome, on écrira encore + ou — deux fois le produit des trois premiers par le quatriéme. + le quarré du quatriéme, & ainſi de ſuite. Ainſi le quarré de $a - b + c$ eſt $aa - 2ab + bb + 2ac - 2bc + cc$.

On a mis ici cette abréviation, parceque l'on a tres-ſouvent beſoin de cette operation dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

Voici une abréviation plus conſiderable pour élever un binome à une puiſſance quelconque.

30. L'on écrira au premier terme la premiere lettre du binome élevée à la puiſſance donnée ; au ſecond la même lettre élevée à une puiſſance plus baſſe de l'unité, & multipliée par la 2e lettre ; au troiſiéme, la même lettre élevée à une puiſſance encore plus baſſe de l'unité & multipliée par le quarré de la ſeconde ; & ainſi de ſuite, en abaiſſant à chaque terme la puiſſance de la premiere lettre de l'unité, & élevant au contraire celle du ſecond de l'unité, juſqu'à ce que l'on arrive au terme, où la même premiere lettre n'aura qu'une dimenſion qui ſera le pénultiéme ; & l'on écrira au dernier terme la ſeconde let-

tre élevée à une puiſſance égale à celle du premier. Ainſi pour élever $a \pm b$ à la 4e puiſſance, l'on écrira, $A.\ a^4 \pm a^3b + aabb \pm ab^3 + b^4$. Si le binome eſt tout poſitif, tous les termes de la puiſſance auront le ſigne +; ſi la ſeconde lettre eſt négative, les termes où elle ſe trouvera élevée à une puiſſance impaire, ou dont l'expoſant eſt un nombre impair, auront le ſigne —, & tous les autres le ſigne +, comme on voit dans la puiſſance *A*.

Il reſte encore à trouver les coefficiens; en voici la Méthode.

On donnera au ſecond terme pour coefficient l'expoſant du premier; on multipliera le coefficient du ſecond par l'expoſant que la premiere lettre *a* du binome a au même ſecond & le produit diviſé par 2, ſera le coefficient du troiſiéme. De même, le coefficient du troiſiéme multiplié par l'expoſant que la premiere lettre a au même troiſiéme, & le produit diviſé par 3, ſera le cofficient du quatriéme; & ainſi de ſuite. De maniere que le coefficient d'un terme quelconque multiplié par l'expoſant que la premiere lettre du binome a dans le même terme, & le produit diviſé par le nombre qui marque le lieu que ce même terme occupe dans l'ordre des termes de la puiſſance, eſt le coefficient du terme ſuivant. Ainſi la 4e puiſſance du binome $a \pm b$ entierement formée eſt,

$a^4 \pm 4a^3b + 6aabb \pm 4ab^3 + b^4$. Il en eſt ainſi des autres.

S'il y a quelque nombre entier ou rompu qui précede l'un des deux, ou tous les deux termes du binome, on multipliera le coefficient de chaque terme de la puiſſance par une puiſſance de ce nombre égale à celle où la lettre qu'il précede y eſt élevée. Ainſi pour élever $a + 2b$ à la 3e puiſſance, l'on y élevera premierement $a + b$, & l'on aura $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, l'on multipliera enſuite les coefficiens des termes où *b* ſe rencontre par la puiſſance de 2 égale à celle où *b* y eſt élevée, c'eſt-à-dire que l'on multipliera $3aab$ par 2, $3abb$ par 4, & b^3 par 8, & l'on aura $a^3 + 6aab + 12abb + 8b^3$, qui ſera le cube de $a + 2b$.

On peut auſſi élever par les mêmes régles un binome quelconque $p+q$ à une puiſſance indéterminée m (m ſignifie un nombre quelconque entier ou rompu, poſitif ou négatif) qui ſera,

$$p^m + mp^{m-1}q + m\times\frac{m-1}{2}p^{m-2}q^2 + m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}$$

$$p^{m-3}q^3 + m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}p^{m-4}q^4 \text{ \&c.}$$

Où l'on voit que la premiere lettre p du binome a pour expoſant dans tous les termes, m moins un nombre entier; c'eſt pourquoi ſi ce nombre entier ſe trouve dans quelqu'un égal à m, l'expoſant de p y ſera $=0$; & par conſequent $p=1$, & ce terme ſera le dernier de la puiſſance m du binome $p+q$. Mais ſi ce nombre entier ne ſe trouve jamais $=m$, la puiſſance m du binome $p+q$ pourra être continuée à l'infini.

31. Le binome $p+q$ élevé à la puiſſance m, comme on vient de faire, peut ſervir de formule génerale, pour élever un binome, ou un polynome quelconque à une puiſſance donnée.

Soit par exemple $2ax-xx$ qu'il faut élever à la 3e puiſſance.

Ayant ſuppoſé $2ax=p$, $-xx=q$, & $m=3$, l'on ſubſtituera en la place de p, de q, & de m, leurs valeurs $2ax$, $-xx$, & 3; & en la place des puiſſances de p & de q, les puiſſances égales de leurs valeurs $2ax$ & $-xx$, & l'on aura $8a^3x^3-12aax^4+6ax^5-x^6$ pour la puiſſance cherchée: car m devient $=3$ au quatriéme terme de la Formule. De même pour élever $a+b-c$ à la 3e puiſſance. Ayant ſuppoſé $a=p$, $b-c=q$, & $m=3$, l'on aura aprés les ſubſtitutions $a^3+3aab+3abb+b^3-3aac-6abc+3acc-3bbc+3bacc-c^3$. Il en eſt ainſi des autres.

32. On ſe contente quelquefois pour élever un polynome à une puiſſance donnée, d'écrire à ſa droite l'expoſant de la puiſſance à laquelle on le veut élever. Ainſi pour élever $a+b$ au quarré, on écrit $\overline{a+b}^2$; pour l'élever au cube, l'on écrit $\overline{a+b}^3$; & en general, pour éle-

ver $\overline{a \pm b}^{m}$ à la puiſſance m, l'on écrit $\overline{a \pm b}.m$. m ſignifie un nombre quelconque entier ou rompu, poſitif ou négatif.

33. Il eſt clair que pour élever une puiſſance quelconque d'un polynome, formée comme on vient de dire, à une puiſſance donnée, il n'y a qu'à multiplier l'expoſant de l'une par l'expoſant de l'autre. Ainſi pour élever $\overline{a+b}^{2}$ à la 3e puiſſance, l'on écrira $\overline{a+b}^{2\times 3} = \overline{a+b}^{6}$. pour élever $\overline{a+b}^{m}$ au quarré, ou à la 2e puiſſance, l'on écrira $\overline{a+b}^{2m}$. Pour élever $\overline{a+b}^{m}$ à la puiſſance n, l'on écrira $\overline{a+b}^{mn}$. Il en eſt ainſi des autres.

34. Il eſt encore évident que pour multiplier deux puiſſances de la même quantité complexe, formées comme on a dit n°. 32. il n'y a qu'à ajouter enſemble leurs poſans. Ainſi pour multiplier $\overline{a+b}^{2}$ par $\overline{a+b}^{3}$, l'on écrira $\overline{a+b}^{2+3} = \overline{a+b}^{5}$; $\overline{a+b-c}^{2} \times \overline{a+b-c}^{-5} = \overline{a+b-c}^{2-5} = \overline{a+b-c}^{-3}$; $\overline{a-b}^{m} \times \overline{a-b}^{n} = \overline{a-b}^{m+n}$; $\overline{a+b}^{m} \times \overline{a+b}^{-n} = \overline{a+b}^{m-n}$; $\overline{a+b}^{m} \times \overline{a+b}^{-m} = \overline{a+b}^{m-m} = \overline{a+b}^{0} = 1$.

DIVISION

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

Regle Generale.

35. On écrira le diviſeur au deſſous du dividende en forme de fraction, & l'on prendra cette fraction pour le quotient de la diviſion. En effet, puiſque toute diviſion numerique exprimée, comme on vient de dire, eſt égale à ſon quotient, par exemple $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{15}{3} = 5$, & quelle peut par conſequent être priſe pour ſon quotient; il en doit être de même des diviſions algebriques. Ainſi pour diviſer ab par c, l'on écrira $\frac{ab}{c}$; pour diviſer $aa +$

bb par $c+d$, l'on écrira $\frac{aa+bb}{c+d}$; *&c.*

36. Mais comme il eſt toujours neceſſaire de réduire les quantitez algebriques à leurs plus ſimples expreſſions lorſqu'il eſt poſſible, & que les diviſions, ou fractions dont on vient de parler, n'y ſont pas toujours réduites, il faut donner les régles neceſſaires pour cet effet.

Il y a differentes manieres, ou plûtôt, il y a des cas où il faut operer d'une certaine maniere ; d'autres, où il faut operer d'une autre maniere pour réduire les fractions, ou les diviſions à leurs plus ſimples termes. Nous ne donnerons à preſent que le cas où l'operation eſt celle qu'on a toujours nommée diviſion ; les autres ſe trouveront ailleurs.

DIVISION

Des quantitez incomplexes.

37. Il eſt évident (n°. 14 & 15) que lorſque le dividende eſt le produit du diviſeur par une autre quantité quelconque, le quotient ſera le dividende, aprés en avoir effacé le diviſeur. Ainſi le quotient de ab diviſé par a eſt b, c'eſt-à-dire que $\frac{ab}{a}=b$; le quotient de abc diviſé par ab eſt c, c'eſt à-dire que $\frac{abc}{ab}=c$; de même $\frac{a^3}{aa}=a$; $\frac{a^3bb}{aab}=ab$. Il en eſt ainſi des autres.

Il y a ſouvent des nombres autres que l'unité qui précedent ou le dividende, ou le diviſeur, & quelquefois tous les deux. Il faut auſſi avoir égard aux ſignes. Voici la regle qu'il faut obſerver.

38. On diviſera par les régles de la diviſion numerique, le nombre qui précede le dividende par celui qui précede le diviſeur, & (n°. 37), les lettres du dividende par celles du diviſeur, & l'on donnera au quotient le ſigne + ſi le dividende & le diviſeur ont tous deux le même ſigne + ou —; & ſi l'un a + & l'autre —, l'on donnera

au quotient le ſigne —. Ainſi le quotient de $12ab$ par $3a$ eſt $4b$: car $\frac{12}{3} = 4$, & $\frac{ab}{a} = a$, & partant $\frac{12ab}{3a} = 4b$. De même $\frac{12abc}{-4ac} = -3b$; $\frac{-15a^2bb}{3aab} = -5ab$; $\frac{-12a^2bb}{-3ab} = 4aab$. Il en eſt ainſi des autres.

39. Si le dividende & le diviſeur ſont ſemblables, & égaux, le quotient ſera l'unité. Ainſi $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{12ab}{12ab} = 1$. Ce qui ſuit de ce que toute quantité ſe meſure, ou ſe contient elle même une fois.

40. Il arrive ſouvent que les nombres ſe peuvent diviſer, & que les lettres ne ſe peuvent pas diviſer; & au contraire, auquel cas il faut diviſer ce qui ſe peut diviſer, & laiſſer le reſte en fraction. Ainſi $\frac{12ab}{3c} = \frac{4ab}{c}$; $\frac{8abc}{3ab} = \frac{8c}{3}$.

41. Lorſque ni les nombres, ni les lettres ne ſe peuvent diviſer, on écrit le diviſeur au deſſous du dividende en forme de fraction; & c'eſt en ce cas qu'il eſt neceſſaire de prendre cette fraction pour le quotient de la diviſion. Ainſi pour diviſer a par b, l'on écrira $\frac{a}{b}$; pour diviſer $3ab$ par $2c$, l'on écrira $\frac{3ab}{2c}$; pour diviſer $-2ab$ par $3c$, l'on écrira $\frac{-2ab}{3c}$, ou $\frac{2ab}{-3c}$; pour diviſer $5ab$ par $-2c$, l'on écrira $\frac{5ab}{-2c}$, ou $\frac{-5ab}{2c}$; pour diviſer $-4ab$ par $-3c$, l'on écrira $\frac{-4ab}{-3c}$, ou $\frac{4ab}{3c}$, On trouvera ailleurs la raiſon des changemens de ſignes que l'on vient de faire.

Si l'on multiplie le quotient d'une diviſion par le diviſeur, il viendra la quantité à diviſer : car la multiplication, & la diviſion ont des effets contraires, auſſi-bien que l'addition & la ſouſtraction.

42. Il eſt clair (n°. 21 & 37) que pour diviſer une puiſ-

ſance

ſance quelconque d'une quantité incomplexe par une puiſſance quelconque de la même quantité, il n'y a qu'à ſouſtraire l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende. Ainſi $\frac{a^3}{aa} = a^{3-2} = a$; $\frac{a^4b^3}{a^3b} = a^{4-3}\,b^{3-1} = abb$; $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} =$ (n°. 31) 1 ; $\frac{a^3}{4a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$; $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = 1$, *&c.*

DIVISION

Des quantitez complexes.

43. LORSQUE le dividende eſt le produit du diviſeur par quelqu'autre quantité, il eſt clair que la diviſion ſe fera toujours exactement auſſi-bien que celle des quantitez incomplexes.

Or il eſt ſouvent aiſé de voir ſi une quantité que l'on veut diviſer par une autre quantité, eſt le produit de la quantité qui doit être le diviſeur par une troiſiéme quantité ; & alors le quotient ſera cette troiſiéme quantité. Ainſi $ax - bx$ diviſée par $a - b$, donnée au quotient x : car $ax - bx$ eſt le produit de $a - b \times x$; & $ax - bx$ diviſée par x, donne au quotient $a - b$. Pareillement $\frac{aaxx - bbxx}{aa - bb} = xx$, & $\frac{aaxx - bbxx}{xx} = aa - bb$, *&c.*

44. Lorſqu'on ne peut pas aiſément voir ſi une quantité complexe peut être diviſée par une autre quantité complexe, il faut l'examiner par la regle qui ſuit, qui eſt celle qu'on appelle diviſion.

45. Pour faire plus facilement la diviſion des quantitez complexes, on examine dans les deux quantitez que l'on veut diviſer l'une par l'autre, qu'elle eſt la lettre qui ſe trouve le plus fréquemment avec des dimenſions differentes ; & l'on écrit dans l'une & dans l'autre quantité le terme, où cette lettre a plus de dimenſions, le premier, & enſuite les autres termes, ſelon l'ordre des puiſſances de la même lettre. Quelques-uns appellent cette lettre, lettre dominante.

Regle.

46. On écrit le diviſeur à la gauche du dividende ; & ſuivant les regles de la diviſion des quantitez incomplexes, on diviſe le premier terme du dividende par le premier du diviſeur, & l'on écrit le reſultat, ou quotient à la droite du dividende. On multiplie tous les termes du diviſeur par le quotient ; & l'on ſouſtrait le produit du dividende, ce qui ſe fait (n°. 13) en écrivant le même produit au-deſſous du dividende avec des ſignes contraires, & on fait enſuite la réduction, en regardant le dividende & ce produit comme une ſeule quantité.

On diviſe de nouveau les quantitez qui viennent aprés la réduction par le même diviſeur, ce qui donne un nouveau terme au quotient; & on acheve cette ſeconde operation comme on a fait la premiere. On réïtere encore la même operation autant de fois qu'il eſt néceſſaire, ou juſqu'à ce que la réduction devienne nulle, ou égale à zero, qui arrive toujours lorſque la quantité à diviſer eſt le produit du diviſeur par une troiſiéme quantité, qui eſt le quotient de la diviſion. Les Exemples éclairciront la regle.

Exemple I.

47. Soit $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ à diviſer par $a - b$. Ayant écrit le dividende & le diviſeur comme on vient de dire, l'on opere en cette ſorte en prenant a pour la lettre dominante.

Diviſeur.	*Dividende.*	*Quotient.*
$a - b$	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	$aa - 2ab + bb$.
Prod.	$- a^3 + aab$	
1re Rédu. A	$0 - 2aab + 3abb - b^3$	
Produit.	$+ 2aab - 2abb$	
2e Rédu. B	$0 + abb - b^3$	
Produit.	$- abb + b^3$	
3e Rédu. C	$0 \quad 0$	

Le premier terme $+a^3$ du dividende diviſé par le premier $+a$ du diviſeur donne pour quotient $+aa$, & multipliant le diviſeur $a-b$ par le quotient $+aa$, l'on a a^3-aab, & ayant écrit $-a^3+aab$ au-deſſous du dividende, & fait la Réduction, l'on aura la quantité A, que j'appelle premiere Réduction.

Le premier terme $-aab$ de la premiere Réduction A diviſé par le premier $+a$ du diviſeur, donne pour quotient $-2ab$, & multipliant le diviſeur $a-b$ par le nouveau terme du quotient $-2ab$, l'on a $-2aab+2abb$; & ayant écrit $+2aab-2abb$ au-deſſous de la premiere Réduction A, l'on aura la ſeconde Réduction B.

Le premier terme $+abb$ de la ſeconde Réduction B, diviſé par le premier $+a$ du diviſeur donne pour quotient $+bb$; & multipliant le diviſeur $a-b$ par $+bb$, l'on a $+aab-b^3$; & ayant écrit $-aab+b^3$ au deſſous de la ſeconde Réduction, l'on aura zero pour la troiſiéme Réduction, qui marque que la diviſion eſt faite, & par conſequent que $\frac{a^3-3aab+3abb-b^3}{a-b}=aa-2ab+bb$,

EXEMPLE II.

48. *Diviſeur.* *Dividende.* *Quotient.*

$aa-ab+cd$. $\left\{a^4-aabb+2abcd-ccdd\right\}$ $\left\{aa+ab-cd\right\}$

Produit. $\left\{-a^4+a^3b-aacd\right\}$

Premiere Réd. $0+a^3b-aabb+aacd+2abcd-ccdd$

Produit. $-a^3b+aabb-abcd$

Seconde Réduct. $0\quad 0-aacd+abcd-ccdd$

Produit. $+aacd-abcd+ccdd$

Troiſiéme Réduction. $0\quad 0\quad 0$

Donc $\frac{a^4-aabb+2abcd-ccdd}{aa-ab+cd}=aa+ab-cd$.

EXEMPLE III.

49. *Diviſeur.* *Dividende.* *Quotient.*

$yy - aa - bb.$ $\left\{ \begin{array}{l} y^6 + aay^4 + b^4yy - a^6 \\ \quad - 2bby^4 - a^4yy - 2a^4bb \\ \qquad\qquad - aab^4 \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} y^4 + 2aayy + a^4 \\ \quad - bbyy + aabb. \end{array} \right.$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} -y^6 + aay^4 \\ \quad + bby^4 \end{array} \right\}$

1re Réduct. $\left\{ \begin{array}{l} 0 + 2aay^4 + b^4yy - a^6 \\ \quad - bby^4 - a^4yy - 2a^4bb \\ \qquad\qquad - aab^4 \end{array} \right\}$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} - 2aay^4 + 2a^4yy \\ \qquad + 2aabbyy \end{array} \right\}$

2e Réduction. $\left\{ \begin{array}{l} - bby^4 + b^4yy - a^6 \\ \qquad + a^4yy - 2a^4bb \\ \qquad + 2aabbyy - aab^4 \end{array} \right\}$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} + bby^4 - aabbyy \\ \qquad - b^4yy \end{array} \right\}$

3e Réduct. $\left\{ \begin{array}{l} 0 + a^4yy - a^6 \\ \quad + aabbyy - 2a^4bb \\ \qquad\qquad - aab^4 \end{array} \right\}$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} - a^4yy + a^6 \\ \qquad + a^4bb \end{array} \right\}$

4e Réduct. $\left\{ \begin{array}{l} + aabbyy - a^4bb \\ \qquad\qquad - aab^4 \end{array} \right\}$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} - aabbyy + a^4bb \\ \qquad\qquad + aab^4 \end{array} \right\}$

5e Réduct. 0 0

Donc $y^4 + aay^2 + b^4yy - a^6 - 2bby^4 - a^4yy - 2a^4bb - aab^4 = y^4 + 2aayy + a^4 - bbyy + aabb.$

$yy - aa - bb$

EXEMPLE IV.

50. *Diviſeur.* *Dividende.* *Quotient.*

$3xx - aa$. $\left\{\begin{array}{l} 9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4 \\ \text{Produit. } -9x^4 + 3aaxx \end{array}\right\}$ $3xx + 4ax - aa$.

1re Réduction. $0 + 12ax^3 + 3aaxx - 4a^3x - a^4$

Produit. $-12ax^3 + 4a^3x$

2e Réduction. $0 + 3aaxx - a^4$

Produit. $-3aaxx + a^4$

3e Réduction. $0 \quad 0$

Donc $\frac{9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4}{3xx - aa} = 3xx + 4ax + aa.$

51. Il y a des diviſions qui ne ſe font qu'en partie, ce qui arrive lorſqu'il vient une Réduction où toutes les lettres du diviſeur ne ſe trouvent plus, ou bien ne s'y trouvent point dans l'état & dans l'ordre qu'elles gardent dans le diviſeur : & en ce cas, l'on écrit le diviſeur au-deſſous de la derniere Réduction, ce qui forme une fraction que l'on ajoute au Quotient, comme on va voir dans l'Exemple qui ſuit.

EXEMPLE V.

52. *Diviſeur.* *Dividende.* *Quotient.*

$ac - dd$. $\left\{\begin{array}{l} aabc + ac^3 - abdd - ccdd + d^4 \\ \text{Produit. } -aabc + abdd \end{array}\right\}$ $ab + cc$.

1re Redu. $-0 + ac^3 \quad 0 - ccdd + d^4$

Produit. $-ac^3 + ccdd$

2e Réduction. $0 \quad 0 + d^4$

Donc $\frac{aabc + ac^3 - abdd - ccdd + d^4}{ac - dd} = ab + cc + \frac{d^4}{ac - dd}$.

53. Il y a des diviſions que l'on pourroit continuer, même à l'infini, quoique tous les termes du diviſeur ne ſe trouvent point dans la derniere Réduction : mais le Quotient deviendroit plus compoſé, & la diviſion de-

viendroit inutile ; c'eſt pourquoi, dans ces ſortes de diviſions, il en faut demeurer à l'endroit, où le Quotient eſt le plus ſimple qu'il puiſſe être.

54. Il arrive auſſi fort ſouvent que les coeficiens, ou les nombres qui précedent les termes, ou quelqu'un des termes du dividende, ou du diviſeur, empêchent que la diviſion ne ſe faſſe, quand même toutes les lettres ſeroient dans l'un & dans l'autre diſpoſées de maniere que la diviſion ſe pût faire.

55. Il y a auſſi des diviſions qui ne ſe peuvent point du tout faire ; ce qui arrive lorſqu'aucun des termes du diviſeur ne ſe trouue point tout entier dans aucun de ceux du dividende : & alors on écrit le diviſeur au-deſſous du dividende, ce qui forme une fraction que l'on prend pour le Quotient de la diviſion, comme on a dit n°. 34.

L'on a ſouvent beſoin de connoître tous les diviſeurs d'un nombre donné, & d'une quantité algebrique donnée pour choiſir celui d'entr'eux qui convient à de certaines operations que l'on eſt obligé de faire ; c'eſt pourquoi nous en allons donner ici la Méthode.

METHODE.

Pour trouver tous les Diviſeurs d'un nombre donné.

56. IL faut diviſer le nombre donné par 2, s'il eſt poſſible, & autant de fois qu'il eſt poſſible ; enſuite diviſer le dernier Quotient par 3, s'il eſt poſſible ; & autant de fois qu'il eſt poſſible ; de même par 5, par 7, par 9, *&c.* juſqu'à ce que le dernier Quotient ſoit l'unité, ou que le diviſeur devienne le nombre propoſé, auquel cas, il n'a aucun diviſeur que lui-même ; & ayant écrit dans une rangée de haut en bas tous les diviſeurs dont on s'eſt ſervi, on multipliera le premier diviſeur par le 2e, & on écrira le produit à la droite du 2e. On multipliera enſuite les deux premiers diviſeurs, & le produit qu'on a déja trouvé par le troiſiéme diviſeur, & l'on écrira les Produits vis à vis le même troiſiéme diviſeur ; on multipliera de même tout ce qui eſt au-deſſous du 4e divi-

ſeur par le même 4.e diviſeur, & l'on écrira les Produits à ſa droite, & ainſi de ſuite, & tous ces Produits ſeront autant de diviſeurs du nombre propoſé.

EXEMPLE.

SOIT le nombre 150 dont il faut trouver tous les diviſeurs.

	A	*B*
Je diviſe 150 par 2, & j'écris le Quotient 75 au-deſſous de *A*, & le diviſeur 2 au-deſſous de *B*;	150	2.
	75	3. 6.
	25	5. 10. 15. 30.
	5	5. 25. 50. 75. 150.
	1	

Je diviſe 75 par 3, & j'écris le Quotient 25, & le diviſeur 3 ſous *A*, & ſous *B*; je diviſe 25 par 5, & j'écris le Quotient 5, & le diviſeur 5, ſous *A* & ſous *B*; je diviſe 5, par 5, & j'écris le Quotient 1, & le diviſeur 5 ſous *A*, & ſous *B*. Cela fait, je multiplie le premier diviſeur 2 par le ſecond 3, & j'écris le Produit 6 à côté de 3. Je multiplie tout ce qui eſt au-deſſus du 3.e diviſeur 5, par lui-même, & j'écris les Produits 10, 15, 30, à ſa droite; enfin je multiplie tout ce qui eſt au deſſus du 4.e diviſeur 5, par lui-même, & j'écris les Produits 25, 50, 75, & 150; (car on néglige 10, 15 qui s'y trouve déja) comme on les voit. Il eſt clair que tous ces nombres qui ſont du côté de *B* peuvent diviſer ſans reſte, le nombre donné 150.

57. C'eſt la même regle pour les quantitez algebriques. Soit par exemple, la quantité $a^3 + aabb$, dont il faut trouver tous les diviſeurs.

A	*B*
$a^3b + aabb$.	*a*.
$aab + abb$.	*a*. *aa*.
$ab + bb$.	*b*. *ab*. *aab*.
$a + b$.	$a + b$. $aa + ab$. $a^3 + aab$. $ab + bb$. $aabb + abb$. $a^3b + aabb$.
1.	

Je diviſe $a^3 + aabb$ par *a*, & j'écris le Quotient $aab + abb$,

ſous A, & le diviſeur a ſous B. Je diviſe $aab + abb$ encore par a, & j'écris le Quotient $ab + ba$, & le diviſeur b ſous A, & ſous B. Je diviſe $ab + bb$ par b, & j'écris le Quotient $a + b$, & le diviſeur b ſous A, & ſous B. Enfin je diviſe $a + b$ par $a + b$; & j'écris le Quotient 1, & le diviſeur $a + b$, ſous A & ſous B. J'acheve l'operation comme celle des nombres, & je trouve tous les diviſeurs de la quantité $a^3 + aabb$ au-deſſous de B.

RESOLUTION.

Des puiſſances, ou de l'extraction des racines des quantitez algebriques.

58. EXTRAIRE la racine d'une puiſſance, ou d'une quantité algebrique, c'eſt trouver, par une operation contraire à celle de la formation des puiſſances, une quantité plus ſimple que la propoſée, qui étant multipliée par elle-même, autant de fois qu'il eſt neceſſaire, produiſe la puiſſance ou la quantité propoſée.

Il y a autant de ſortes de racines, qu'il y a de puiſſances; & l'on donne à chaque racine le nom de la puiſſance à laquelle elle ſe rapporte. Ainſi la quantité qu'il ne faut multiplier qu'une fois par elle-même pour produire la quantité ou la puiſſance dont elle eſt la racine, eſt nommée *racine quarrée*, ou ſeconde racine; celle qu'il faut multiplier deux fois par elle-même, pour produire la puiſſance dont elle eſt la racine, eſt appellée *racine cube*, ou troiſiéme racine; celle qu'il faut multiplier trois fois, eſt nommée *racine quarrée quarrée*, ou quatriéme racine; celle qu'll faut multiplier quatre fois *racine quarrée cube*, ou cinquiéme racine; celle qu'il faut multiplier cinq fois, *racine cube cube*, ou ſixiéme racine, *&c.*

On ſe ſert de ce caractere $\surd$ qu'on appelle *ſigne radical*, pour ſignifier le mot de *racine*: mais pour le déterminer à ſignifier une telle racine, on y joint l'expoſant de la puiſſance à laquelle ſe rapporte la racine en queſtion, & cet expoſant eſt alors appellé expoſant du ſigne radical. Ainſi $\sqrt[2]{}$, ou ſimplemeut $\surd$, ſignifie racine

cine quarrée, ou ſeconde racine; $\sqrt[3]{}$, ſignifie racine cube, quatriéme racine, *&c.* De ſorte que $\sqrt{ab}$, ou $\sqrt{aa+bb}$, $\sqrt{aa+2ab+bb}$, ſignifie qu'il faut extraire la racine quarrée de ab, ou de $aa+bb$, ou de $aa+2ab+bb$, &c.

Il y a des quantitez dont la racine propoſée s'extrait exactement; d'autres, dont on ne la peut extraire qu'en partie; & d'autres, dont on ne la peut point du tout extraire.

59. Les quantitez dont on ne peut extraire exactement la racine, & qu'on eſt obligé d'exprimer par le moyen du ſigne radical, ſont nommées, *ſourdes*, ou *irrationnelles*, & celles qui ne ſont affectées d'aucun ſigne radical, ſont nommées *rationnelles*. Ainſi $\sqrt{ab}$, $\sqrt{aa+bb}$, ſont des quantitez irrationnelles, parceque l'on n'en peut pas extraire la racine quarrée; $\sqrt[3]{aab}$ eſt une quantité irrationnelle, parceque l'on n'en peut pas extraire la racine cube; *&c.*

EXTRACTION

Des racines des quantitez incomplexes

60. PUISQUE (n°. 22.) pour élever une quantité incomplexe à une puiſſance donnée, il faut multiplier les expoſans de cette quantité par l'expoſant de la puiſſance propoſée; il eſt clair que pour extraire la racine propoſée d'une quantité incomplexe, il n'y a qu'à diviſer les expoſans de cette quantité par l'expoſant du ſigne radical convenable; ou, ce qui revient au même, multiplier les expoſans de la quantité propoſée par une fraction dont le numerateur ſoit l'unité, & le dénominateur ſoit l'expoſant du ſigne radical dont il s'agit, c'eſt-à-dire, par $\frac{1}{2}$, s'il s'agit de la racine quarrée; $\frac{1}{3}$, s'il s'agit de la racine cube; $\frac{1}{4}$, s'il s'agit de la racine quarrée quarrée, *&c.*: car les dénominateurs 2, 3 & 4 ſont les expoſans des ſi-

gnes radicaux $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, *&c.* L'on rend par-là l'operation de l'extraction des racines, ſemblable à celle de la formation des puiſſances, & l'on a des expoſans pour les racines auſſi bien que pour les puiſſances: car $\frac{1}{2}$ eſt l'expoſant de la racine quarrée; $\frac{1}{3}$, l'expoſant de racine cube; $\frac{1}{4}$, l'expoſant de la racine quarrée quarrée, *&c.* & l'on peut par conſequent énoncer l'extraction des racines, en diſant qu'il faut élever une quantité donnée à la puiſſance $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, *&c.* au lieu de dire qu'il en faut extraire la racine quarrée, cube, quarrée quarrée, *&c.*

Si aprés la multiplication des expoſans de la quantité propoſée par les fractions dont on vient de parler, les expoſans qui ſont alors fractionnaires, ſe peuvent tous réduire en entier, la racine propoſée ſera une quantité rationnelle; ſi une partie de ces expoſans ſe peut réduire en entier, & que l'autre partie demeure fractionnaire, la racine ne ſera extraite qu'en partie, & l'on mettra la partie rationnelle devant le ſigne radical, & la partie irrationnelle aprés; ſi tous ces expoſans demeurent fractionnaires, la racine ne ſera point extraite, & l'on ſe contentera de mettre le ſigne radical devant la quantité propoſée; enfin ſi les expoſans fractionnaires qui ne peuvent être réduits en entier ſurpaſſent l'unité, la puiſſance de la lettre dont ils ſont expoſans, ſera en partie rationnelle, & en partie irrationnelle. Il faudra operer ſur les coéficiens, comme ſur les lettres, en y employant les extractions numeriques des racines, & la Méthode de trouver tous les diviſeurs d'un nombre, expliquée n°. 56. Tout ce qu'on vient de dire ſera éclairci par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLES.

61. SOIT $a^2 b^4 c^5$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puiſſance $\frac{1}{2}$; ayant multi-

plié les expoſans 2, 4 & 6 par $\frac{1}{2}$, l'on aura $a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{6}{2}}$, ou ou ab^2c^3 aprés avoir réduit les expoſans fractionnaires en entier, de ſorte que $\sqrt{a^2b^4c^6} = ab^2c^3$, ce qui eſt évident.

De même, $\sqrt{a^2b} = ab^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{b}$: car a eſt la racine de aa, ou a^2, & $b^{\frac{1}{2}}$ eſt la même choſe que $\sqrt{b}$; $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$; c'eſt-à-dire que $\sqrt{ab}$ eſt une quantité toute irrationnelle ; $\sqrt{a^3b} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} =$ (n°. 23.) $a^1 a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{ab}$; $\sqrt{72\, a^3b^3} = 6ab\sqrt{2ab}$: car il eſt clair par les Exemples précedens, que $\sqrt{a^3b^3} = ab\sqrt{ab}$, & je démontre que $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ en cette ſorte. Si l'on cherche (n°. 56) tous les diviſeurs de 72, & qu'on examine tous les quarrez qui s'y rencontrent (s'il s'agiſſoit de la racine cube, il faudroit examiner tous les cubes, & ainſi des autres racines) on trouvera que 36 eſt le plus grand, Or $\frac{72}{36} = 2$ & $36 \times 2 = 72$; c'eſt pourquoi $\sqrt{72}$ peut être regardée comme le produit de $\sqrt{36} \times \sqrt{2}$: mais $\sqrt{36} = 6$; donc $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, & partant $\sqrt{72\, a^3b^3} = 6ab\sqrt{2ab}$. On trouvera de même que $\sqrt{12aab} = 2a\sqrt{3b}$, & que $\sqrt{6aabc} = a\sqrt{6bc}$; parceque 6 ne peut être diviſé par aucun quarré. Il en eſt ainſi des autres.

EXTRACTION

Des racines des Polynomes.

62. LA Méthode d'extraire les racines des Polynomes, ſelon la maniere ordinaire, eſt ſemblable à celle d'extraire la racine des nombres,

EXEMPLE I.

SOIT la quantité $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$, dont il faut extraire la racine quarrée.

Diviſeurs.	*Quantité propoſée.*	*Racine, ou Quot.*
	$aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc.$	$(a+b+c.$
	$-aa.$	
1. $2a+b.$	$A.\ 0+2ab+bb+2ac+2bc+cc$	
	$-2ab-bb$	
2. $2a+2b+c.$	$B.\ 0\quad 0+2ac+2bc+cc$	
	$-2ac-2bc-cc$	
	$C.\ 0\quad 0\quad 0.$	

Je dis, le premier terme aa eſt un quarré, dont la racine eſt a que j'écris au Quotient, & je ſouſtrais le quarré de a qui eſt aa du premier terme aa de la quantité propoſée, en l'écrivant au-deſſous avec le ſigne —. Je réduis à la maniere de la diviſion la quantité propoſée, & le quarré ſouſtrait, & j'écris la Réduction A au-deſſous d'une ligne.

Je double le Quotient a, ce qui me donne $2a$ que j'écris à la gauche de la Réduction A, & qui fait partie du premier diviſeur. Je diviſe le premier terme $+2ab$ de la quantité A par $2a$; ce qui me donne $+b$ que j'écris au Quotient, & à la droite du diviſeur $2a$, & j'ai le premier diviſeur complet $2a+b$ que je multiplie par le nouveau Quotient b, & j'ai plus $2ab+bb$ que je ſouſtrais de la quantité A, en l'écrivant au-deſſous avec des ſignes contraires, & la Réduction de ces deux quantitez me donne la quantité B. Je double le Quotient $a+b$, & j'ai $2a+2b$ pour une partie du nouveau diviſeur que j'écris à la gauche de B. Je diviſe de nouveau le premier terme $2ac$ de la quantité B par $+2a$, ce qui me donne $+c$ que j'écris au Quotient, & à la droite du nouveau diviſeur $2a+2b$; ce qui fait $2a+2b+c$ pour le ſecond diviſeur complet. Je multiplie ce ſecond diviſeur $2a$

$+2b+c$ par le nouveau Quotient c, & j'ai $2ac+2bc+cc$ que j'écris au-deſſous de la quantité B avec des ſignes contraires ; & réduiſant ces deux quantitez je trouve zero pour la troiſiéme Réduction ; d'où je conclus que l'operation eſt achevée, & que par conſequent,

$\sqrt{aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc} = a+b+c.$

EXEMPLE II.

SOIT la quantité $9aa-12ab+4bb$ dont il faut extraire la racine quarrée.

Diviſeurs.	*Quantité propoſée.*	*Racine ou Quotient.*
	$9aa-12ab+4bb.$	$(3a-2b.$
	$-9aa$	
$6a-2b:$	$A.\ 0\ -12ab+4bb$	
	$+12ab-4bb$	
	$B.\ \ 0\ \ 0$	

Le premier terme $9aa$ étant un quarré dont la racine eſt $3a$; j'écris $3a$ au Quotient, & ſon quarré $9aa$ au-deſſous de $9aa$ avec le ſigne —, & la premiere Réduction eſt la quantité A. Je double le Quotient $3a$, ce qui me donne $6a$, qui font partie du premier diviſeur, & que j'écris à la gauche de la quantité A. Je diviſe $-12ab$ par $+6a$, ce qui me donne $-2b$ que j'écris au Quotient & à la droite de $6a$, & j'ai par ce moyen le diviſeur complet $6a-2b$. Je multiplie $6a-2b$ par $-2b$, ce qui me donne $-12ab+4bb$, & j'écris $+12ab-4bb$ au-deſſous de la quantité A. Je réduis ces deux dernieres quantitez, & la Réduction B qui ſe trouve égale à zero, fait voir que la quantité propoſée eſt un quarré dont la racine eſt $3a-2b$, c'eſt-à-dire, que $\sqrt{9aa-12ab+4bb} = 3a-2b.$

S'il venoit une Réduction qui ne pût être diviſée par le double du Quotient, ce ſeroit une marque que la quantité propoſée ne ſeroit point quarrée ; & il faudroit alors ſe contenter de la mettre ſous le ſigne radical. Par

exemple, ſi on vouloit extraire la racine quarrée de $aa + bb$, l'on trouveroit que la racine de aa eſt a : mais on ne pourroit diviſer la Réduction bb par $2a$, ce qui feroit voir que $aa + bb$, n'eſt point un quarré ; c'eſt pourquoi il faudroit ſe contenter d'en exprimer la racine en cette ſorte $\sqrt{aa + bb}$. Il en eſt ainſi des autres.

Au reſte, il eſt aiſé de connoître par la formation des puiſſances, ou lorſqu'on a un peu d'habitude dans le calcul algebrique, ſi une quantité propoſée eſt quarrée, ou un cube, *&c.* & d'en extraire par conſequent la racine ſans le ſecours d'aucune operation, ou par la ſeule inſpection des termes de la quantité propoſée.

63. Mais ſans cela, & ſans le ſecours des Régles que nous venons de donner, l'on peut, avec toute la facilité poſſible extraire toutes ſortes de racines, quarrées, cubes, quarrées quarrées, *&c.* par le moyen de la formule generale propoſée n°. 30 : car pour cela il n'y a qu'à regarder les quantitez dont on veut extraire une racine quelconque, comme des quantitez qu'il faut élever à une puiſſance dont l'expoſant ſoit celui de la racine qu'on veut extraire, c'eſt-à-dire, que cet expoſant ſoit $\frac{1}{2}$, ſi c'eſt la racine quarrée ; $\frac{1}{3}$, ſi c'eſt la racine cube ; $\frac{1}{4}$, ſi c'eſt la racine quarrée quarrée, *&c.* ce qui eſt facile en ſuivant ce qui eſt preſcrit n°. 31, comme on va voir par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

SOIT la quantité $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ dont il faut extraire la racine cube, ou ce qui eſt la même choſe, qu'il faut élever à la puiſſance $\frac{1}{3}$.

Ayant fait $a^3 = p$, $- 3aab + 3abb - b^3 = q$, & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes, $p^m + mp^{m-1}q$ de la formule generale propoſée n°.

30 ; (car les autres termes ſont inutiles, lorſque les racines qu'on veut extraire, ſont rationnelles ;) l'on aura $a^{3m} + ma^{3m-3} \times -3aab + 3abb - b^3$, & faiſant encore $m = \frac{1}{3}$, l'on aura $a^1 + \frac{1}{3} a^{-2} \times -3aab + 3abb - b^3$, ou $a - a^{-2+2} b + a^{-2+1} bb - \frac{1}{3} a^{-2} b^3$: mais parceque le ſecond terme $- a^{-2+2} b = - a^0 b = 1b = b$; le troiſiéme & quatriéme terme ſont nuls. Ainſi l'on a $a - b$ pour la racine cherchée, c'eſt-à-dire, que

$\overline{a^3 - 3aab + 3abb - b^3}^{\frac{1}{3}}$; ou $\sqrt[3]{a^3 - 3aab + abb - b^3} = a - b$.

Exemple II.

Soit la quantité $aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puiſſance $\frac{1}{2}$.

Ayant fait aa ou $a^2 = p$, $+ 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc = q$, & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes de la Formule $p^m + mp^{m-1} q$, l'on aura $a^{2m} + ma^{2m-2} \times \overline{2ab - 2ac + bb - 2bc + cc}$, ou en faiſant $m = \frac{1}{2}$; $a + \frac{1}{2} a^{1-2} \times \overline{2ab - 2ac + bb - 2bc + cc}$, ou $a + a^{1-2+1} b - a^{1-2+1} c + \frac{1}{2} a^{1-2} bb - a^{1-2} bc + \frac{1}{2} a^{1-2} cc$. Mais parceque le ſecond & troiſiéme terme deviennent $+ b$, & $- c$; il ſuit que tous les autres termes, où b, & c ſe rencontrent ſont nuls. Ainſi

$\overline{aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc}^{\frac{1}{2}}$, ou
$\sqrt{aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc} = a + b - c$.

EXEMPLE III.

SOIT la quantité $9aa + 12ab + 4bb$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puissance $\frac{1}{2}$.

Ayant supposé $9aa$, ou $9a^2 = p$, & $12ab + 4bb = q$, & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes de la Formule $p^m + mp^{m-1}q$, l'on aura $9^m a^{2m} + m9^{m-1} a^{2m-2} \times \overline{12ab + 4bb}$, ou en faisant $m = \frac{1}{2}$, $9^{\frac{1}{2}} \times a^{1 + \frac{1}{2}} \times 9^{-\frac{1}{2}} a^{-1} \times \overline{12ab + 4bb}$, ou $9^{\frac{1}{2}} a + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} a^{-1} \times \overline{12ab + 4bb}$: mais $9^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{9} = 3$; donc $3a + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a^{-1} \times \overline{12ab + 4bb}$, ou $3a + \frac{1}{6} a^{-1} \times \overline{12ab + 4bb}$, ou $3a + \frac{12}{6} a^{-1+1} b + \frac{4}{6} a^{-1} bb$, ou $3a + 2a^0 b + \frac{2}{3} a^{-1} \times bb$: mais le second terme $2a^0 b = 1b$; c'est pourquoi ce second terme est le dernier, & le troisiéme est nul. Ainsi $\overline{9aa + 12ab + 4bb}^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{9aa + 12ab + 4bb} = 3a + 2b$.

REMARQUE.

64. SI dans aucun terme la valeur de m, exposant de p, ne se trouvoit point $= 0$, la racine de la quantité proposée seroit irrationnelle, & l'extraction se pourroit continuer à l'infini; ce qu'on appelle approximation des racines: mais cela n'est point necessaire pour l'Application de l'Algebre à la Geometrie: car lorsque la racine d'une quantité est irrationnelle, on se contente de l'exprimer par le moyen du signe radical qui lui convient, comme on a déja dit, & comme on pourra voir dans la suite.

Pour

Pour s'aſſeurer ſi on a bien extrait une racine, il eſt bon de l'élever à ſa puiſſance : car s'il vient la quantité propoſée, l'extraction aura été bien faite. Par exemple, l'on vient de trouver $3a+2b$ pour la racine quarrée de $9aa+12ab+4bb$. Or ſi l'on multiplie $3a+2b$ par $3a+2b$, l'on trouvera $9aa+12ab+4bb$ qui eſt la quantité propoſée, c'eſt pourquoi l'extraction a été bien faite.

REDUCTION

Des quantitez irrationelles à leurs plus ſimples expreſſions.

65. IL y a des quantitez complexes, comme d'incomplexes, dont on ne peut point extraire exactement la racine demandée : mais il arrive ſouvent que ces quantitez ſont le produit de la puiſſance dont on veut extraire la racine par quelqu'autre quantité ; & en ce cas on peut extraire la racine en partie, en mettant devant le ſigne radical la racine de cette puiſſance, & l'autre quantité ſous le ſigne radical. Par exemple, il eſt aiſé de voir que $aab+aac$ n'eſt point un quarré, & qu'on n'en peut par conſequent extraire la racine quarrée, qu'en l'écrivant ſous le ſigne radical en cette ſorte $\sqrt{aab+aac}$: mais on voit aiſément que $aab+aac$ eſt le produit de aa qui eſt un quarré, par $b+c$, ou que $\sqrt{aab+aac}=\sqrt{aa}\times\sqrt{b+c}$: or $\sqrt{aa}=a$; donc $\sqrt{aab+aac}=a\times\sqrt{b+c}=a\sqrt{b+c}$; & c'eſt ce qu'on appelle extraire une racine en partie, ou plûtôt ce qu'on appelle réduire une quantité irrationelle à ſa plus ſimple expreſſion, ce qu'on doit toujours faire quand cela ſe peut, ſoit que les quantitez ſoient complexes ou incomplexes.

Lorſqu'on ne voit pas par la ſeule inſpection des termes, ſi une quantité irrationelle complexe ou incomplexe peut être réduite à une expreſſion plus ſimple, on l'examinera en cherchant (n°. 56 ou 57) tous les diviſeurs qui la peuvent exactement diviſer ; & s'il s'en trouve quelqu'un qui ſoit une puiſſance du même nom que la racine qu'on

veut extraire, la quantité propoſée ſe pourra réduire à une plus ſimple expreſſion : car elle pourra être regardée comme le produit de cette puiſſance, & du quotient qui vient en la diviſant par la même puiſſance. Par exemple, s'il faut extraire la racine quarrée de $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$, en cherchant tous les diviſeurs de cette quantité, on trouvera que $aa - 2ab + bb$, qui eſt un quarré, en eſt un, & qu'en diviſant $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ par $aa - 2ab + bb$, il vient au quotient $a - b$; c'eſt pourquoi $\sqrt{a^3 - 3aab + 3abb - b^3} = \sqrt{aa - 2ab + bb} \times \sqrt{a - b}$; or $\sqrt{aa - 2ab + bb} = a - b$; donc $\sqrt{a^3 - 3aab + 3abb - b^3} = a - b\sqrt{a - b}$.

Lorſqu'on trouve pluſieurs diviſeurs qui ſont des puiſſances de même nom que les racines qu'on veut extraire, on ne ſe ſervira que du plus grand.

66. On ajoute, on ſouſtrait, on multiplie, & on diviſe les quantitez irrationelles comme les rationelles ; & ces 4. operations ſe font de la même maniere pour les unes & pour les autres : mais pour une plus grande facilité, il les faut auparavant réduire à leurs expreſſions les plus ſimples ; & comme les quantitez irrationelles ne different des rationelles que par le ſigne radical qui caracteriſe de maniere celles qu'il précede, que quand elles contiendroient les mêmes lettres que celles qui le précedent, elles ne leur ſeroient pas pour cela ſemblables ; de ſorte que les quantitez qui ſont hors du ſigne radical, ne doivent point être mêlées dans aucune de ces quatre operations, avec celles qui ſont ſous le ſigne radical.

Il faut neanmoins remarquer que les quantitez irrationelles ſont ſemblables, lorſque celles qui ſont ſous les ſignes radicaux, ne different en rien du tout les unes des autres, & lorſque celles qui ſont hors des ſignes radicaux ne different de même en rien du tout, ou ne different que par leurs coéficiens. Ainſi $3a\sqrt{a}$ & $2a\sqrt{a}$; $3a\sqrt{a+b}$; & $a\sqrt{a+b}$; $\frac{a}{b}\sqrt{ax - xx}$, & $\frac{3a}{b}\sqrt{ax - xx}$, ſont des

quantitez irrationelles ſemblables. On ſuppoſe que le ſigne radical ſoit le même, ce qui arrive toujours dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

ADDITION

Des quantitez irrationelles.

67. ON les écrira de ſuite, ou au-deſſous les unes des autres avec les ſignes qu'on leur trouve, & lorſqu'elles ſeront ſemblables, on en fera (n°. 11) la réduction comme ſi c'étoit des quantitez rationelles. Ainſi pour ajouter $2a\sqrt{b}$ avec $3a\sqrt{b}$, l'on écrira $2a\sqrt{b} + 3a\sqrt{b}$, qui ſe réduit à $5a\sqrt{b}$. Pour ajouter $3a\sqrt{b}$ avec $2c\sqrt{b}$, l'on écrira $3a\sqrt{b} + 2c\sqrt{b}$, & il eſt indifferent de laiſſer ces quantitez en cet état, ou de les écrire en cette ſorte $\overline{3a + 2c}\sqrt{b}$. Pour ajouter $a\sqrt{ax - xx}$ avec $b\sqrt{ax - xx}$, l'on écrira $a\sqrt{ax - xx} + b\sqrt{ax - xx}$, ou $\overline{a + b}\sqrt{ax - xx}$. Pour ajouter $3a\sqrt{b}$ avec $2c\sqrt{d}$, l'on écrira $3a\sqrt{b} + 2c\sqrt{d}$ qui ne peut point avoir d'autre expreſſion.

SOUSTRACTION

Des quantitez irrationelles.

68. ON les écrira de ſuite en changeant les ſignes de celles qui doivent être ſouſtraites ; & lorſqu'elles ſeront ſemblables. on en fera (n°. 11) la réduction comme ſi c'étoit des quantitez rationnelles. Ainſi pour ſouſtraire $3a\sqrt{b}$ de $5a\sqrt{b}$, l'on écrira $5a\sqrt{b} - 3a\sqrt{b}$ qui ſe réduit à $2a\sqrt{b}$. Pour ſouſtraire $3a\sqrt{2b}$ de $5b\sqrt{2b}$, l'on écrira $5b\sqrt{2b} - 3a\sqrt{2b}$, ou $\overline{5b - 3a}\sqrt{2b}$. Pour ſouſtraire $-2b\sqrt{ax - xx}$ de $3b\sqrt{ax - xx}$, l'on écrira $3b\sqrt{ax - xx} + 2b\sqrt{ax - xx}$, qui ſe réduit à $5b\sqrt{ax - xx}$. Pour ſouſtraire $2c\sqrt{d}$ de $3a\sqrt{b}$ l'on écrira $3a\sqrt{b} - 2c\sqrt{d}$, qui ne peut avoir d'autre expreſſion.

MULTIPLICATION.

Des quantitez irrationnelles.

69. Si les quantitez que l'on veut multiplier ſont incomplexes, l'on multiplira la partie rationelle par la rationelle ; & la partie irrationelle par l'irrationelle, & l'on écrira le produit des parties rationelles devant le ſigne radical & le produit des irrationelles aprés, & l'on réduira le produit total à ſon expreſſion la plus ſimple. Ainſi $a\sqrt{b} \times c\sqrt{b} = ac\sqrt{bb}$: mais $\sqrt{bb} = b$; donc $ac\sqrt{bb} = abc$; d'où l'on voit que lorſque les parties irrationelles ſont ſemblables, il n'y a qu'à multiplier le produit des rationelles par ce qui ſe trouve ſous le ſigne radical. De même $a\sqrt{b} \times \sqrt{c}$, ou $a\sqrt{b} \times 1\sqrt{c}$ (car on prend l'unité pour partie rationelle, lorſqu'il n'y en a point d'autre) $= a\sqrt{bc}$; $2a\sqrt{b} \times 3b$, ou $2a\sqrt{b} \times 3b\sqrt{1} = 6ab\sqrt{b}$; $2a\sqrt{bc} \times b\sqrt{ab} = 2ab\sqrt{abbc} = 2abb\sqrt{ac}$; $2a\sqrt{3bc} \times 3b\sqrt{6ab} = 6ab\sqrt{18abbc} = 18abb\sqrt{2ac}$; $a\sqrt{2b} \times 2b\sqrt{3c} = 2ab\sqrt{6bc}$. $\sqrt[3]{ab} \times \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{aabb}$; $2a\sqrt[3]{ab} \times 3b\sqrt[3]{aa} = 6ab\sqrt[3]{a^3b} = 6aab\sqrt[3]{b}$. Il en eſt ainſi des autres.

70. Si les quantitez que l'on veut multiplier ſont incomplexes, on multipliera tous les termes de l'une par chacun de ceux de l'autre, en ſuivant les regles des quantitez incomplexes, & la Réduction des produits particuliers étant faite, l'on aura le produit total. Ainſi $\sqrt{aa+bb} \times \sqrt{aa+bb} = aa+bb$; $\sqrt{aa-bb} \times -\sqrt{aa-bb} = -aa+bb$; $2a\sqrt{aa+bb} \times b\sqrt{aa+bb} = 2a^3b+2ab^3$. Ceci eſt évident ; car lorſque la même quantité ſe trouve ſous le ſigne radical $\sqrt{}$, en ôtant le ſigne radical, cette quantité ſe trouve multipliée par elle-même. Ce qu'on peut encore prouver en cette ſorte : $\sqrt{aa+bb} \times \sqrt{aa+bb} = \overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}} \times \overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}} =$ (n°. 34.) $\overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, ou (n°. 33.) $aa+bb^{\frac{1}{2}\times 2} = aa+bb$. Il en eſt ainſi des autres.

Pour multiplier $\sqrt{a+b}$ par $\sqrt{a-b}$, on multipliera $a+b$ par $a-b$, comme ſi c'étoit des quantitez rationelles, & l'on aura $\sqrt{aa-bb}$. De même $a+\sqrt{ab}\times b = ab+b\sqrt{ab}$; $a+\sqrt{ab}\times\sqrt{bc} = a\sqrt{bc}+\sqrt{abbc} = a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}$; $3a\sqrt{bc}-2b\sqrt{ac}\times 2c\sqrt{ab} = 6ac\sqrt{abbc}-4bc\sqrt{aabc} = 6abc\sqrt{ac}-4abc\sqrt{bc}$. Voici des Exemples plus compoſez.

$a+\sqrt{aa-bb}$ multiplié

par $a+\sqrt{aa-bb}$

$aa+\sqrt{aa-bb}$

$+\sqrt{aa-bb}+aa-bb$

Prod. $aa+2a\sqrt{aa-bb}+aa-bb$.

$a+\sqrt{aa-xx}$ multiplié

par $a-\sqrt{aa-xx}$

$aa+a\sqrt{aa-xx}$

$-a\sqrt{aa-xx}-aa+xx$

Produit $aa \quad * \quad -aa+xx$.

$\sqrt{ab}+\sqrt{aa-xx}$ multiplié

par $\sqrt{ab}+\sqrt{aa-xx}$

$ab+\sqrt{a^3b-abxx}$

$+\sqrt{a^3b-abxx}+aa-xx$

Produit. $ab+2\sqrt{a^3b-abxx}+aa-xx$.

$ac+b\sqrt{aa-xx}$ multiplié

par $bc-c\sqrt{aa-yy}$

$abcc+bbc\sqrt{aa-xx}$

$-acc\sqrt{aa-yy}-bc\sqrt{a^4-aaxx-aayy+xxyy}$

Prod. $abcc+bbc\sqrt{aa-xx}-acc\sqrt{aa-yy}$

$-bc\sqrt{a^4-aaxx-aayy+xxyy}$.

DIVISION

Des quantitez irrationelles.

71. On écrira le dividende au-deſſous du diviſeur en forme de fraction, & l'on prendra cette fraction pour le Quotient de la diviſion. Mais lorſque l'on s'appercevra que le dividende ſera le produit du diviſeur par une autre quantité, ce qui eſt aiſé dans les quantitez incomplexes, on prendra cette autre quantité pour le Quotient. Et dans les quantitez incomplexes, lorſqu'on n'appercevera pas le Quotient, on examinera (n°. 46.) ſi la diviſion ſe peut faire; & ſi elle ſe fait, l'on aura un Quotient ſans fraction: mais ſi elle ne ſe fait point, on ſe contentera de la diviſion indiquée. Ainſi $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = b$; $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$; $\frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3a\sqrt{3c}$; $\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x}$: car $a+x \times a-x = aa-xx$. Il en eſt ainſi des autres.

Il y a d'autres Réductions pour les diviſions indiquées qu'on trouvera ailleurs; & tout ce que nous allons dire des raports, & des fractions, ſe doit auſſi entendre de ces ſortes de diviſions, ſoit qu'elles ſoient rationelles, ou irrationelles.

THEORIE.

Des Raiſons, ou Raports, des Fractions, des Equations, & des Proportions.

DE'FINITIONS.

II. RAISON, ou Raport eſt la comparaiſon de deux grandeurs de même genre, telles que ſont deux nombres, deux lignes, deux ſurfaces, deux corps, deux eſpaces de temps, deux quantitez de mouvement, deux viteſſes d'un même, ou de deux differens mobiles, deux poids, deux ſons, *&c.*

Or comparer les grandeurs, c'eſt operer ſur les grandeurs; & comme l'on ne peut operer ſur les grandeurs qu'en les ajoutant, ſouſtrayant, multipliant, diviſant, & en en extrayant les racines; il faut neceſſairement que leur comparaiſon ſe faſſe par quelques-unes de ces operations.

Mais parceque l'Addition, & la Multiplication les confondent, & n'en marquent point l'égalité, ou l'inégalité, en quoi conſiſte préciſément la comparaiſon des grandeurs, & que l'extraction des racines n'agit que ſur une ſeule; & qu'au contraire la Souſtraction fait connoître l'égalité de deux grandeurs, ou l'excés de l'une par-deſſus l'autre, ou la difference de l'une à l'autre, & que la Diviſion détermine combien de fois une grandeur en contient, ou eſt contenue dans une autre; ou, ce qui eſt la même choſe, indique la maniere dont une grandeur en contient, ou eſt contenue dans une autre, ou en marque l'égalité; il ſuit qu'il n'y a que la Souſtraction & la Diviſion qui puiſſent ſervir à comparer les grandeurs.

1. La comparaiſon de deux grandeurs par la Souſtraction; ou, ce qui eſt la même choſe, la Souſtraction elle même, eſt nommée raiſon ou raport *arithmetique*, Ainſi

$12 - 4$; $a - b$, ou $b - a$, &c, ſont des raiſons ou des raports arithmetiques.

2. La comparaiſon de deux grandeurs par la Diviſion; ou, ce qui eſt la même choſe, la Diviſion elle-même eſt appellée raiſon, ou raport *geometrique*. Ainſi $\frac{12}{4}$, ou $\frac{4}{12}$; $\frac{a}{b}$, ou $\frac{b}{a}$, &c. ſont des raiſons ou des raports geomet.

On prend ici la Souſtraction indiquée pour la Souſtraction même, ou pour la difference des deux grandeurs qui la compoſent; & l'on prend de même la Diviſion indiquée pour la Diviſion même, ou pour le Quotient des deux quantitez qui la forment.

On appellera dans la ſuite *Réduction*, le réſultat de ces deux Regles, ou de ces deux Raports, c'eſt-à-dire, la difference & le Quotient des deux quantitez qui les compoſent.

COROLLAIRE I.

3. IL eſt clair que les raiſons ou raports tant arithmetiques que geographiques, ſont égaux lorſque leurs Réductions ſont égales. Ainſi $12 - 4 = 16 - 8$, parceque $12 - 4 = 8$, & $16 - 8 = 8$. De même $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$, parceque $\frac{12}{4} = 3$, & $\frac{9}{3} = 3$. Par la même raiſon, ſi $\frac{a}{b} = f$, & $\frac{c}{d} = f$; l'on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

4. Mais les Réductions, ou les Quotiens des diviſions, ou des raports geometriques, ſont toujours égaux, lorſque les dividendes contiennent, ou ſont contenues de même maniere dans les diviſeurs. C'eſt pourquoi lorſque une grandeur a contiendra, ou ſera contenue dans une autre grandeur b, comme une troiſiéme c contient ou eſt contenue dans une quatriéme d, ces quatre grandeurs formeront toujours deux raports geometriques égaux, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

COROLLAIRE II.

5. IL eſt de même évident que les raiſons, ou raports tant arithmetiques que geometriques, ſont inégaux, lorſque leurs Réductions ſont inégales, & que le plus grand eſt celui dont la Réduction eſt la plus grande. Ainſi $12-4 > 10-6$: car $12-4=8$, & $10-6=4$. De même $\frac{12}{4} > \frac{16}{8}$: car $\frac{12}{4}=3$, & $\frac{16}{8}=2$.

6. Le premier terme d'un raport arithmetique, & le terme ſuperieur d'un raport geometrique, ſont nommez *antecedens*; le ſecond d'un raport arithmetique, & l'inferieur d'un raport geometrique, ſont nommez *conſequens*. Ainſi dans les raports $a-b$, & $\frac{a}{b}$, a eſt l'antecedent, & b le conſequent : mais comme les raiſons ou les raports geometriques ne ſont autre choſe que des Diviſions indiquées, & que ces Diviſions ſont, à proprement parler, des fractions; il ſuit qu'il n'y a aucune difference entre raiſon, raport, diviſion, & fraction; de ſorte que tout ce qu'on dira dans la ſuite des uns, ſe doit auſſi entendre des autres. On remarquera ſeulement que pour parler comme les autres, lorſqu'il s'agira des raiſons ou raports, on appellera les deux termes *antecedent* & *conſequent*; lorſqu'il s'agira de diviſions, on les apellera *dividende* & *diviſeur*; & lorſqu'il s'agira de fractions, on les appellera *numerateur* & *dénominateur*.

7. Lorſque l'antecedent d'une raiſon eſt égale à ſon conſequent, on l'appelle *raiſon d'égalité*; & lorſque l'un ſurpaſſe l'autre, on l'appelle *raiſon d'inégalité*.

8. Lorſque l'antecedent d'un raport geometrique, contient pluſieurs fois exactement ſon conſequent, il eſt nommé *multiple* de ce conſequent, & lorſque l'antecedent eſt contenu pluſieurs fois exactement dans ſon conſequent, il eſt nommé *ſoûmultiple* du même conſequent.

9. De tels raports tirent leur dénomination du nombre de fois que l'antecedent contient le conſequent, ou

y eſt contenu. De ſorte que ſi l'antecedent contient deux, trois, quatre fois, *&c.* ſon conſequent, le raport ſera nommé *double*, *triple*, *quadruple*, *&c.* & ſi l'antecedent eſt contenu deux, trois, quatre fois, *&c.* dans le conſequent, le raport ſera nommé *ſoûdouble*, *ſoûtriple*, *ſoûquadruple*, &c. Ainſi $\frac{12}{4}$ eſt un raport triple, & $\frac{4}{12}$ eſt un raport ſoûtriple.

10. On appelle *équation* deux quantitez algebriques differentes, entre leſquelles ſe trouve le ſigne d'égalité; ainſi $a = b$; $ax - xx = yy$; $x = \frac{ab}{c}$ ſont des équations.

11. Les deux quantitez algebriques qui ſe trouvent de part & d'autre du ſigne d'égalité ſont nommées *membres* de l'équation; celle qui le precede eſt nommée le premier membre, & celle qui le ſuit, le ſecond. D'où l'on voit que les deux membres d'une équation ſont les expreſſions algebriques d'une même quantité, ou de deux quantitez égales.

COROLLAIRE.

12. IL eſt évident que deux raports égaux arithmetiques, ou geometriques, peuvent toujours former une équation. Ainſi ſi a ſurpaſſe, ou eſt ſurpaſſée par b, de la même quantité que c ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſée par d, l'on aura toujours $a - b = c - d$, ou $b - a = d - c$. De même ſi a contient ou eſt contenue dans b, comme c contient ou eſt contenue dans d, l'on aura toujours $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

13. Mais ſi au lieu de former une équation de deux raports égaux, arithmetiques, ou geometriques, on arange leurs quatres termes de ſuite, en ſorte que l'antecedent de l'un des deux raports ſoit le premier, ſon conſequent, le ſecond; l'antecedent de l'autre raport, le troiſiéme, & ſon conſequent le quatriéme, en ſéparant les deux raports par quatre points, & les deux termes de

chaque raport par un ſeul point, en cette ſorte $a.b :: c.d$, (en ſuppoſant que $a - b = c - d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$); on appellera *proportion*, ou *analogie* cette diſpoſition des quatres termes de deux raports égaux. De ſorte que proportion ou analogie, n'eſt autre choſe que l'égalité de deux raports arangez autrement qu'en équation. Si les raports ſont arithmetiques, on la nommera *proportion arithmetique*; s'ils ſont geometriques, on la nommera *proportion geometrique*.

14. Pour énoncer une proportion, comme celle-ci $a.b :: c.d$; on dira, ſi elle eſt arithmetique, a ſurpaſſe b, ou eſt ſurpaſſée par b, comme c ſurpaſſe d, ou eſt ſurpaſſée par d, & ſi elle eſt geometrique, on dira a contient b, ou eſt contenue dans b, comme c contient d, ou eſt contenue dans d. Mais pour abreger, ſoit que la proportion ſoit arithmetique, ou geometrique, on dit a eſt à b, comme c eſt à d, ou comme a eſt à b, ainſi c eſt à d, en obſervant neanmoins que le mot *eſt* ſignifie *ſurpaſſe*, ou *eſt ſurpaſſé* dans la proportion arithmetique; & que dans la geometrique, il ſignifie *contient* ou *eſt contenu*.

L'on diſtingue deux ſortes de proportions, tant arithmetiques que geometriques, la *diſcrete*, & la *continue*.

15. La proportion diſcrete eſt celle dont les quatre termes ſont differens, comme celle-ci $a.b :: c.d$.

16. La proportion continue, eſt celle où la même quantité eſt le conſequent du premier raport & l'antecedent du ſecond, comme celle-ci $a.b :: b.c$.

17. Les quantitez qui forment une proportion ſont nommées *proportionnelles*. Ainſi la proportion diſcrete renferme quatre proportionnelles, & la continue n'en renferme que trois, & celle du milieu eſt nommée *moyenne proportionnelle*, arithmetique, ou geometrique, ſelon que la proportion eſt arithmetique, ou geometrique, & dans l'une & dans l'autre proportion; le premier & le dernier termes ſont nommés *extrêmes*, & les deux du milieu, *moyens*.

18. Lorſqu'une proportion continue renferme plus

de trois termes : ou plûtôt lorſque pluſieurs grandeurs dont le nombre ſurpaſſe 3, ſont rangées de ſuite, de maniere que chacune d'elles puiſſe ſervir de conſequent à celle qui la précede ; & d'antecedent à celle qui la ſuit, cette rangée de grandeurs eſt appellée *progreſſion*, arithmetique ou geometrique, ſelon que les raports que les grandeurs qui la compoſent ont entr'elles, ſont arithmetiques ou geometriques. *A*, *B*, *C*, ſont des progreſſions arithmetiques. *D*, *E*, *F*, des progreſſions geometriques.

A. 1 . 2 . 3 . 4 . 5, *&c.*
B. 10 . 8 . 6 . 4 . 2, *&c.*
C. 4 . 2 . 0 — 2 — 4, *&c.*
D. 1 . 2 . 4 . 8 . 16, *&c.*
E. 81 . 27 . 9 . 3 . 1, *&c.*
F. 4 . 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$, *&c.*

COROLLAIRE I.

19. IL eſt clair (n°. 18.) que dans une progreſſion arithmetique, l'excés d'un terme quelconque par-deſſus celui qui le ſuit, ou qui le précede, doit être toujours le même. De ſorte que ſi on nomme le premier terme d'une progreſſion arithmetique *a* ; & l'excés qui regne dans la progreſſion *m*, (*m* peut ſignifier un nombre quelconque, entier, ou rompu, poſitif, ou negatif) l'on pourra former par le moyen de ces deux lettres, une progreſſion arithmetique generale en cette ſorte,
$a . a + m . a + 2m . a + 3m$, &c.

COROLLAIRE II.

20. IL n'eſt pas moins évident que ſi dans la progreſſion geometrique, l'on diviſe un terme quelconque par celui qui le ſuit, la réduction, ou le quotient ſera toujours le même ; c'eſt pourquoi ſi l'on nomme le premier terme d'une progreſſion geometrique *b*, & la réduction ou quotient qui regne dans la progreſſion *n* (*n* ſignifie un nombre poſitif, entier, ou rompu), l'on pourra former une progreſſion geometrique generale, en cette ſorte.

$b . \frac{b}{n} . \frac{b}{n^2} . \frac{b}{n^3}$, &c. car ſi une quantité *b* diviſée par

une autre, donne au quotient n, la même quantité b, diviſée par le quotient n donnera cette autre.

21. Ceci ſe peut auſſi appliquer aux proportions tant arithmetiques que geometriques. Soit par exemple, la proportion arithmetique ſuivante $a . b :: c . d$; ſi l'on nomme $a - b$, ou $b - a$, m ; $c - d$ ou $d - c$ ſera auſſi m; donc $a . a - m :: c . c - m$, ou $a . a + m :: c . c + m$, d'où l'on voit que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens, c'eſt-à-dire, $a + c \pm m = a \pm m + c$, puiſque ces deux ſommes, qui ſont les deux membres de cette équation, renferment les mêmes quantitez.

22. De même, ſi dans la proportion geometrique ſuivante $a . b :: c . d$, on fait $\frac{a}{b} = n$, l'on aura auſſi $\frac{c}{d} = n$; & partant (n°. 20.) $a . \frac{a}{n} :: c . \frac{c}{n}$; d'où l'on voit auſſi que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, c'eſt-à-dire, $\frac{ac}{n} = \frac{ac}{n}$: car ces deux produits qui ſont les deux membres de cette équation, renferment les mêmes quantitez.

AXIOME I.

23. SI l'on ajoute, ou ſi l'on ſouſtrait, ou ſi l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe des quantitez égales par des quantitez égales ; les ſommes, ou les differences, ou les produits, ou les quotiens, ſeront égaux.

COROLLAIRES.

1er. IL ſuit qu'on peut ajouter, ſouſtraire, multiplier, ou diviſer les deux membres d'une équation par les deux membres d'une autre, chacun par chacun. Par exemple, ſi $a = b$, & $c = d$, l'on aura $a \pm c = b \pm d$, ou $a \pm d = b \pm c$; $ac = bd$, ou $ad = bc$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ou $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$.

2e. Il ſuit auſſi de cet Axiome, & de ce que l'Addition & la Souſtraction ont des effets contraires, que l'on peut

paſſer tel terme que l'on voudra d'un membre d'une équation dans l'autre en changeant ſon ſigne, ce qu'on appelle *tranſpoſition*. On peut même paſſer tous les termes d'un des membres dans l'autre, ce qu'on appelle égaler tout à zero. Ainſi cette équation $a+b-c=g$ ſe peut changer en celle-ci $a+b=g+c$, ou en celle-ci $a=g+c-b$, ou en celle-ci $a+b-c-g=0$, ou $0=g-a-b+c$: car par exemple, dans le premier changement, on ne fait qu'ajouter c de part & d'autre du ſigne d'égalité, parcequ'elle y eſt ſouſtraite, ce qui donne $a+b-c+c=g+c$, qui ſe réduit à $a+b=g+c$. Il en eſt ainſi des autres changemens.

3°. Il ſuit de ce Corollaire que l'on peut changer tous les ſignes d'une équation ; car il n'y a qu'à ſuppoſer qu'on fait paſſer tous les termes d'un membre dans l'autre ; & que l'on peut mettre ſeuls dans un des membres, les termes qu'on veut, avec les ſignes qu'on veut.

4°. Il ſuit encore du même Axiome, & de ce que la diviſion détruit ce que fait la multiplication ; & au contraire, qu'on peut délivrer une équation de toutes les fractions qui s'y peuvent rencontrer : car il n'y a qu'à multiplier toute l'équation par tous les dénominateurs l'un après l'autre, ou ce qui revient au même, la multiplier une ſeule fois par le produit de tous les dénominateurs, & enſuite réduire (art. 1. n°.37.) les termes fractionnaires. Par exemple, pour ôter les fractions de cette équation $\frac{abx}{c}+gx=\frac{bcd}{a}$, on la multiplira par c & puis par a, ou une ſeule fois par ac, & l'on aura $\frac{aabcx}{c}+acgx+\frac{abccd}{a}$: mais (art. 1, n°37.) $\frac{aabcx}{c}=aabx$, & $\frac{abccd}{a}=bccd$; donc $abcx+acgx=bccd$ qui n'a plus de fractions.

L'on abrege l'operation, & particulierement quand les dénominateurs ſont des polynomes, en écrivant les numerateurs des termes fractionnaires ſans y rien changer, & en multipliant les autres termes par les dénomi-

nateurs. Ainſi pour ôter la fraction de cette équation $\frac{xx-aa}{b-y}=c$, ayant multiplié c par $b-y$, l'on aura $xx-aa=bc-cy$. Il en eſt ainſi des autres.

5°. Il ſuit auſſi qu'on peut délivrer une lettre, ou telle puiſſance qu'on voudra d'une même lettre, qui ſe trouve dans une équation, de toutes autres quantitez qui la multiplient; ce qu'on appelle trouver la valeur d'une lettre ou d'une puiſſance: car il n'y a pour cela qu'à diviſer toute l'équation par les quantitez qui multiplient cette lettre aprés avoir mis dans un des membres tous les termes où ſe trouve cette lettre, & tous les autres termes dans l'autre membre, & qu'à faire enſuite la réduction. Par exemple, ſi dans cette équation $ax=bc$, l'on veut mettre x ſeule dans le premier membre, l'on aura en diviſant toute l'équation par a, $\frac{ax}{a}=\frac{bc}{a}$: mais (art. 1. n°. 37.) $\frac{ax}{a}=x$; donc $x=\frac{bc}{a}$. Le ſecond membre ne peut être réduit.

Si dans celle-ci $ax=ab+bx-bc$, l'on veut avoir x ſeule dans un des membres, l'on aura en tranſpoſant, & en ſuppoſant que a ſurpaſſe b, $ax-bx=ab-bc$, & en diviſant tout par $a-b$, l'on aura $\frac{ax-bx}{a-b}=\frac{ab-bc}{a-b}$: mais (art. 1. n°. 43, ou 46) $\frac{ax-bx}{a-b}=x$; donc $x=\frac{ab-bc}{a-b}$.

Si dans cette équation $ax-bx=aa-bb$, l'on veut avoir x ſeule, en diviſant par $a-b$, l'on aura $\frac{ax-bx}{a-b}=\frac{aa-bb}{a-b}$: mais (art. 1. n°. 46) $\frac{ax-bx}{a-x}=x$, & $\frac{aa-bb}{a-b}=a+b$; donc $x=a+b$.

Si dans cette équation $aaxx + aayy - 2ax^3 - 2axyy + x^4yy = 0$, l'on veut mettre yy ſeule dans le premier membre, l'on aura en tranſpoſant $aayy - 2axyy + x^4yy = 2ax^3 - aaxx$, & en diviſant chaque membre par $aa - 2ax + xx$, l'on aura $yy = \frac{2ax^3 - aaxx}{aa - 2ax + xx}$. Il en eſt ainſi des autres.

AXIOME II.

24. LES puiſſances & les racines des quantitez égales ſont égales.

Ainſi ſi $x = \pm a$, l'on aura en quarrant chaque membre $xx = aa$; & ſi $xx = aa$, les racines ſeront $x = \pm a$; ſi $xx = ab$, les racines ſeront $x = \pm\sqrt{ab}$. Si $xx = -ab$, les racines ſeront $x = \pm\sqrt{-ab}$, qu'on appelle racine *imaginaire*, parce que l'on n'en peut pas exprimer la valeur, telles ſont toutes les quantitez irrationelles negatives.

Si $yy = \frac{2ax^3 - aaxx}{aa - 2ax + xx}$, les racines ſeront $y = \frac{\sqrt{2ax^3 - aaxx}}{\sqrt{aa - 2ax + xx}}$; mais (art. 1. n°. 66.) $\sqrt{2ax^3 - aaxx} = x\sqrt{2ax - aa}$, & $\sqrt{aa - 2ax + xx} = a - x$; donc $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$.

Si $xx = ax + bb$, les racines ſeront $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: car en tranſpoſant, l'on a $xx - ax = bb$: or ſi l'on extrait (art. 1, n°. 62) la racine du premier membre $xx - ax$, on trouvera qu'il y manque $+\frac{1}{4}aa$, afin qu'il ſoit quarré; c'eſt pourquoi en ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4}aa$, l'on aura $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$: mais $\sqrt{xx - ax + \frac{1}{4}aa} =$ (art. 1. n°. 62) $x - \frac{1}{2}a$, & la racine du ſecond membre ne s'extrait que par le moyen du ſigne radical; donc $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ ou en tranſpoſant $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Si les ſignes

étoient

étoient differens, cela n'apporteroit aucun changement dans l'operation.

C'eſt auſſi parceque les puiſſances des quantitez égales ſont égales, que l'on peut délivrer une équation de quantitez irrationelles qui s'y rencontrent, ce qu'on appelle *faire évanouir les ſignes radicaux* : car s'il ne s'y en rencontre qu'une, aprés l'avoir miſe ſeule dans un des membres de l'équation par les Corollaires précedens ; il n'y aura qu'à élever chaque membre à la puiſſance qui a pour expoſant celui du ſigne radical. Ainſi pour délivrer des quantitez irrationelles, cette équation $xx = a - x \times \sqrt{xx+yy}$, l'on aura en diviſant par $a-x$, $\frac{xx}{a-x} = \sqrt{xx+yy}$, ou en diviſant par $\sqrt{xx+yy}$, $\frac{xx}{\sqrt{xx+yy}} = a - x$, & en quarrant chaque membre, l'on aura $\frac{x^4}{xx+yy} = aa - 2ax + xx$, où il n'y a plus de quantitez irrationelles.

Mais s'il ſe rencontre deux quantitez irrationelles dans une même équation, on la délivrera de l'une, & enſuite de l'autre, comme on vient de dire. Par exemple, pour délivrer de quantitez irrationelles, cette équation $\sqrt{xx+yy} + \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = b$, l'on aura en tranſpoſant, $\sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = b - \sqrt{xx+yy}$, & en quarrant chaque membre, l'on aura $aa - 2ax + xx + yy = bb - 2b\sqrt{xx+yy} + xx + yy$, & en ôtant ce qui ſe détruit par la réduction, & tranſpoſant, il vient $2b\sqrt{xx+yy} = bb - aa + 2ax$, & en quarrant encore chaque membre, l'on a $4bbxx + 4bbyy = b^4 - 2aabb + a^4 + 4abbx - 4a^3x + 4aaxx$, où il n'y a plus de quantitez irrationelles.

AXIOME III.

25. ON peut mettre en la place d'une quantité quelconque incomplexe ou complexe, une autre quantité égale incomplexe, ou complexe, ce qu'on appelle *ſubſtituer* :

C'eſt par le moyen de cet Axiome que l'on réduit pluſieurs équations à une ſeule, & que l'on en fait évanouir les lettres que l'on veut, pourvû que chacune de ces lettres, ou quelques unes de leurs puiſſances ſe trouvent au moins dans deux de ces équations, & que l'on ait au moins une équation de plus qu'il y a de lettres que l'on veut faire évanouir. En voici la Méthode.

26. On choiſit une des équations (c'eſt ordinairement la plus ſimple) & l'on met ſeule (Axio. 1. & ſes Coroll.) la lettre qu'on veut faire évanouir, dans un des membres; (c'eſt ordinairement dans le premier), & l'on ſubſtitue dans les autres équations, en la place de cette lettre, ou de ſes puiſſances, ſa valeur, ou celle de ſes puiſſances, qui ſe trouve dans l'autre membre de l'équation que l'on a préparée; en ſorte que cette lettre ne ſe trouve plus dans aucune, & l'on a alors une équation de moins. On recommence de nouveau à choiſir la plus ſimple des équations réſultantes, & l'on met ſeule dans le premier membre, la lettre qu'on veut faire évanouir, & l'on ſubſtitue comme auparavant la valeur de cette lettre dans les autres équations. On réïtere la même operation juſqu'à ce que l'on ait fait évanouir l'une aprés l'autre, toutes les lettres que l'on a deſſein de faire évanouir, ou juſqu'à ce que l'on n'ait plus qu'une ſeule équation. On va éclaircir ceci par des Exemples.

EXEMPLES.

1er. SOIENT les trois équations A, B, C, dont on veut faire évanouir les deux lettres x & y.

$A.\ xz = yy.$ $\quad D.\ xz = bb - 2bz + zz.$
$B.\ x - y = a.$ $\quad E.\ x - b + z = a.$
$C.\ z + y = b.$ $\quad F.\ az + bz - zz = bb - 2bz + zz.$
$G.\ 2zz = 3bz + az - bb.$

Je choiſis l'équation C pour faire évanouir y, & j'en tire $y = b - z$, & en quarrant chaque membre (parce-

que le quarré de y ſe trouve dans l'équation A,) j'ai $yy = bb - 2bz + zz$, & mettant dans l'équation A, pour yy ſa valeur $bb - 2bz + zz$, & dans l'équation B, pour y ſa valeur $b - z$, j'ai les deux équations D & G, où y ne ſe trouve plus. Je choiſis de nouveau l'équation E pour faire évanouir x, & j'en tire $x = a + b - z$, & mettant dans l'équation D pour x ſa valeur $a + b - z$, j'ai l'équation F, qui devient par la réduction, & par la tranſpoſition, l'équation G, où x & y ne ſe trouvent plus.

2e. Soient les deux équations $aa + 2ax + xx = 2yy + 2by + bb$, & $yy + by = aa + ax$, d'où il faut faire évanouir y. Je remarque que ſi la ſeconde équation étoit multipliée par 2, l'on auroit $2yy + 2by = 2aa + 2ax$, où les termes où y ſe trouve, ſont les mêmes que dans la premiere ; c'eſt pourquoi ſi l'on met dans la premiere pour $2yy + 2by$ ſa valeur $+ 2aa + 2ax$ tirée de la ſeconde, aprés l'avoir multipliée par 2, l'on aura $aa + 2ax + xx = 2aa + 2ax + bb$, qui ſe réduit à $xx = aa + bb$. Il en eſt ainſi des autres.

27. On peut encore par le moyen de cet Axiome faire certains changemens dans une équation en faiſant certaines ſuppoſitions. Par exemple, ſi l'on a $x^3 = aab$, en ſuppoſant $ay = xx$; & mettant cette valeur de xx dans l'équation $x^3 = aab$, l'on aura $axy = aab$, ou $xy = ab$, en diviſant toute l'équation par a.

De même, ſi l'on a $xx = ax + bb$, en ſuppoſant $ac = bb$, l'on aura $xx = ax + ac$; & ſi l'on a $xx = ax + ac$, en ſuppoſant $bb = ac$, l'on aura $xx = ax + bb$. Ce qu'on appelle changer un rectangle en quarré, ou un quarré en rectangle. On a ſouvent beſoin de faire ces changemens.

Pour ce qui reſte à dire ſur les équations : voyez l'Application de l'Algebre à la Geometrie, Section I. art. 2 & 3.

On trouve dans les Ouvrages de pluſieurs Sçavans Geometres, un grand nombre de Theorêmes démontrez ſur les raports, proportions, & progreſſions ; mais il y manque la Méthode de les démontrer tous par le mê-

me principe, qui eſt ce qu'il y a de plus à deſirer tant en cette occaſion que dans toutes les autres parties de Mathematiques.

On pourroit tirer de ce que nous avons dit n°. 18, 19, 20, & 21, une Méthode pour démontrer tres-facilement toutes les proprietez des proportions, & des progreſſions tant arithmetiques que geometriques : mais elle n'eſt pas aſſez generale, & ne convient qu'aux grandeurs proportionnelles ; c'eſt pourquoi je me ſuis déterminé à prendre une autre voye, qui convienne tout à la fois, non ſeulement aux grandeurs proportionnelles, mais encore à tous les Theorêmes que l'on ſe propoſe de démontrer par l'Algebre dans toutes les parties de Mathematiques. Voici le principe.

PRINCIPE.

28. APRE'S avoir nommé les quantitez qui doivent entrer dans la queſtion par des lettres, l'on écrira l'Hypotheſe en équation, & la conſequence auſſi en équation ; & en ſuivant les trois Axiomes précedens, & leurs Corollaires, on fera en ſorte de rendre l'Hypotheſe ſemblable à la conſequence, & alors le Theorême ſera démontré. Et ſi les termes de l'équation que renfermera la conſequence, ſe trouvent entierement ſemblables ; de ſorte que par la réduction, elle puiſſe devenir $o = o$. Le Theorême ſera auſſi démontré : car les termes d'une équation ne ſçauroient être entierement ſemblables ſans être égaux, & ne ſçauroient ſe détruire ſans être ſemblables.

EXPLICATION DU PRINCIPE.

1°. UN Theorême contient deux parties, l'Hypotheſe & la Conſequence ; l'Hypotheſe eſt ce que l'on y ſuppoſe ; & la Conſequence eſt la verité qu'il s'agit de démontrer.

2°. Le principe demande qu'on écrive toujours l'Hypotheſe en équation. Souvent l'Hypotheſe renferme cette équation, ou une proportion qu'il eſt aiſé de changer en équation : car ſi l'on a, $a . b :: c . d$, l'on aura (n°. 11.)

$a-b=c-d$, ſi la proportion eſt arithmetique, & $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ſi la proportion eſt geometrique, puiſque proportion n'eſt autre choſe que l'égalité de deux raports.

3°. Si l'Hypotheſe ne renferme ni équation ni proportion, on égalera les quantitez qu'elle renferme à d'autres lettres priſes arbitrairement, & l'on aura par ce moyen des équations, comme on verra par ces Exemples.

4°. On tirera de l'Hypotheſe autant d'équations qu'on pourra : car cela ne peut que faciliter les moyens de rendre l'Hypotheſe ſemblable à la Conſequence.

Lorſqu'il s'agit de démontrer quelques proprietez touchant les grandeurs inégales, & touchant les raports inégaux, l'on exprimera l'Hypotheſe, & la conſequence par le moyen du ſigne $>$, ou $<$, en cette ſorte $a>$ ou $<b$, $\frac{a}{b}>$ ou $<\frac{c}{d}$, & on ſe ſervira de ces expreſſions, que l'on pourroit appeller *inégalitez*, comme ſi c'étoient des équations : car il eſt clair qu'on peut ajouter, ſouſtraire, multiplier, & diviſer les deux membres de ces inégalitez par une même quantité, ou par des quantitez égales, les combiner, comme on voudra avec des équations, les élever à des puiſſances, en extraire les racines ; en un mot, on peut les traiter à la maniere des équations, pourvû qu'on ne les combine point enſemble, ſans que le membre le plus grand ceſſe d'être le plus grand ; de ſorte qu'on aura les mêmes moyens de rendre l'Hypotheſe ſemblable à la Conſequence, ou la Conſequence ſemblable à l'Hypotheſe, que ſi c'étoit des équations, & de démontrer par conſequent toutes les proprietez des raports inégaux, de la même maniere que celles des raports égaux.

Ce qu'on dira dans la ſuite des raports & des proportions, ſe doit entendre des raports & proportions geometriques, à moins qu'on n'avertiſſe que c'eſt des raports & proportions arithmetiques qu'on veut parler.

THEOREME I.

29. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont en proportion geometrique, le produit des extrêmes ſera égal au produit des moyens.*

Il faut prouver que ſi $a . b :: c . d$, l'on aura $ad = bc$.

L'on a par l'Hypotheſe $a . b :: c . d$; donc (n°. 11.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: or il eſt clair (Axio. 1. Coroll. 4.) qu'en ôtant les fractions, on aura $ad = bc$, qui eſt ſemblable à la Conſequence. *C. Q. F. D.*

30. On prouvera de même que dans une proportion continue le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne. Ainſi ſi $a . b :: b . c$, l'on aura $ac = bb$.

Ce Theorême fournit un autre moyen dont nous nous ſervirons dans la ſuite, de changer une proportion en équation.

COROLLAIRES.

1er. IL ſuit que connoiſſant trois des termes a, b, c, d'une proportion, on pourra toujours trouver le 4e que je nomme x : car puiſque (Hyp.) $a . b :: c . x$, l'on aura (n°. 29.) $ax = bc$; donc en diviſant toute cette équation par a, l'on aura $x = \frac{bc}{a}$, d'où l'on voit que la valeur de bc diviſée par la valeur de a, donnera celle de x.

2e. De même dans la proportion continue, connoiſſant les extrêmes a & b, on trouvera la moyenne que je nomme y ; car puiſque (Hyp.) $a . y :: y . b$, l'on aura $yy = ab$; & partant (Axio. 2.) $y = \pm \sqrt{ab}$; c'eſt pourquoi la racine de la valeur de ab ſera la valeur de y. Les valeurs negatives ne ſatisfont point aux Problêmes. On en expliquera l'uſage ailleurs.

THEOREME II.

31. *LES racines des produits qui forment chaque membre d'une équation ſont reciproquement proportionnelles, c'eſt-à-dire qu'en prenant les racines d'un des membres pour les extrêmes, & les racines de l'autre pour les moyens, ces quatre racines formeront une proportion.*

Soit l'équation $abc = dfg$. Il faut prouver que $ab . df :: g . c$, ou afin que la conſequence ſoit en équation $\frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$: car l'équation ne peut être vraye que la proportion ne le ſoit auſſi.

En diviſant toute l'équation $abc = dfg$, par gc, l'on aura $\frac{abc}{gc} = \frac{dfg}{gc}$, ou (art. 1. n°. 37.) $\frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$, qui eſt ſemblable à la conſequence. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRES.

1er. ON peut tirer de la même équation $abc = dfg$ pluſieurs autres proportions, & les démontrer de la même maniere, pourvû qu'on prenne les extrêmes dans un membre, & les moyens dans l'autre, & qu'on garde la Loi des Homogenes, c'eſt-à-dire que les termes de chaque raport ayent un pareil nombre de dimenſions : par exemple, on en peut tirer $a . d :: fg . bc$; $b . f :: dg . ac$, *&c.* mais quoiqu'on le puiſſe, on n'en doit pas tirer $a . df :: g . bc$: car on compareroit des quantitez de differens genres, comme une ligne avec un plan. Il en eſt ainſi des autres.

2e. Il eſt clair qu'afin qu'une équation puiſſe être réduite en proportion, il faut que chaque membre ſoit le produit de deux quantitez qui ſe puiſſe ſéparer par la diviſion ; c'eſt pourquoi il eſt ſouvent neceſſaire de la changer d'état pour la réduire en proportion. Par exemple, on ne peut réduire cette équation $xx = ax + bb$ en proportion dans l'état où elle eſt : car le ſecond mem-

bre ne peut être diviſé par aucune quantité : mais en tranſpoſant, l'on a $xx - ax = bb$, d'où l'on peut tirer x. $b :: b . x - a$. De celle-ci $xx = aa - bb$, on peut tirer $a - b . x :: x . a + b$. De celle-ci $xx = aa + bb$, ou $xx - aa = bb$, on peut tirer $x - a . b :: b . x + a$. Mais pour changer celle-ci $xx = aa - be$ en proportion ; il faut changer bc en un quarré, ou aa en un rectangle dont un côté ſoit b, ou c ; faiſant donc, par exemple, $bc = dd$, l'on aura $xx = aa - dd$, d'où l'on tire $a - d . x :: x . a + d$. Il en eſt ainſi des autres.

3°. Il ſuit auſſi qu'un raport ou une fraction comme $\frac{ab}{c}$ eſt un des termes d'une proportion, & renferme les trois autres : car faiſant $\frac{ab}{c} = x$, l'on aura en multipliant par c, $ab = cx$; donc (n°. 31.) $c . a :: b . x$, ou $c . a :: b . \frac{ab}{x}$, en remettant pour x ſa valeur $\frac{ab}{c}$.

4°. Il ſuit auſſi des deux Theorêmes précedens que ſi quatre grandeurs a, b, c, d, ſeront proportionelles, c'eſt-à-dire que $a . b :: c . d$, elles ſeront auſſi proportionelles dans les quatre variations ſuivantes.

1. $a . c :: b . d$, ce qu'on appelle, *permutando.*
2. $b . a :: d . c$, ce qu'on appelle, *invertendo.*
3. $a + b . b :: c + d . d$, ce qu'on appelle, *componendo.*
4. $a - b . b :: c - d . d$, ce qu'on appelle, *dividendo.*

Car ſi les équations que l'on tirera (n°. 29.) de ces quatre analogies ſont vrayes, les analogies le ſeront auſſi. Or la premiere & la ſeconde analogie donnent $ad = bc$, la troiſiéme donne $ad + bd = bc + bd$, & la quatriéme $ad - bd = bc - bd$: mais l'Hypotheſe $a . b :: c . d$, donnée $ad = bc$, qui eſt la premiere équation, & qui montre par conſequent la verité des deux premieres analogies.

Si l'on ajoute, & ſi l'on ſouſtrait bd de chaque membre de l'équation $ad = bc$ tirez de l'Hypotheſe, l'on aura $ad + bd = bc + bd$, & $ad - bd = bc - bd$, qui ſont ſemblables

ſemblables aux deux dernieres équations tirées des deux dernieres analogies, & qui en ſont par conſequent voir la verité.

Il y a encore d'autres variations dans les proportions que l'on démontrera avec la même facilité.

THEOREME III.

32. *SI deux grandeurs quelconques* a *&* b, *ſont multipliées par une même grandeur* c, *rationelle, ou irrationelle, les produits* ac & bc, *ſeront en même raiſon que les mêmes quantitez* a, *&* b.

Il faut prouver que $ac . bc :: a . b$, ou, afin que la conſequence ſoit en équation, que (n°. 29.) $abc = abc$.

Parceque les deux membres de cette équation ſont ſemblables, il ſuit (n°. 29, & 31.) que ce qui étoit propoſé eſt vrai.

COROLLAIRES.

1°. IL eſt clair qu'on peut multiplier les quatre termes d'une proportion, ou l'un ou l'autre des deux raports qui la forment, ou les deux antecedens, ou les deux conſequens de ces raports, par telle quantité qu'on voudra, ſans que ces raports ceſſent d'être égaux.

2°. Et parceque les raports, ou les diviſions indiquées ſont des fractions, il ſuit qu'on peut multiplier les deux termes d'une fraction par telle quantité qu'on voudra ſans que cette fraction change de valeur. Ainſi $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, en multipliant les deux termes par c.

3°. Une quantité quelconque, qui n'eſt point fractionnaire devient une fraction étant comparée à l'unité, ce qui n'y change rien ; c'eſt pourquoi toute quantité qui n'eſt point fractionnaire, peut être changée en une fraction, dont le dénominateur ſera telle quantité qu'on voudra. Ainſi a ou $\frac{a}{1} = \frac{ab}{b}$, en multipliant chaque terme par b.

4°. Il ſuit auſſi qu'on peut donner à des fractions des dénominateurs ſemblables, lorſqu'elles en ont de differens, ce qu'on appelle *réduire les fractions à même dénomination*: car pour cela, il n'y a qu'à multiplier les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre, s'il n'y en a que deux. Ainſi pour réduire à même dénomination $\frac{ab}{c}$ & $\frac{df}{g}$, ayant multiplié les deux termes de la premiere par g, & ceux de la ſeconde par c, l'on aura $\frac{abg}{cg}$ & $\frac{cdf}{cg}$. S'il y en a un plus grand nombre, on multipliera les 2 termes de chacune par le produit des dénominateurs des autres. Ainſi pour réduire $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$ en même dénomination; ayant multiplié les deux termes de la premiere par fg, ceux de la ſeconde par dg, & ceux de la troiſiéme par df, l'on aura $\frac{afg}{dfg}$, $\frac{bdg}{dfg}$, $\frac{cdf}{dfg}$.

Il ſe trouve ſouvent des fractions que l'on peut réduire à même dénomination, ſans les changer toutes d'expreſſion. Ainſi $\frac{abb}{cd}$ & $\frac{gh}{c}$, ſeront réduites en même dénomination, en multipliant les deux termes de la ſeconde par d: car l'on aura $\frac{dgh}{cd}$.

5°. Il ſuit encore que c'eſt la même choſe de diviſer le dénominateur d'une fraction, par une quantité quelconque, ou de multiplier ſon numerateur par la même quantité. Ainſi $\frac{\frac{ab}{c}}{d} = \frac{abd}{cd} = \frac{\frac{abd}{c}}{d}$.

THEOREME IV.

33. *SI l'on diviſe deux grandeurs quelconques* a *&* b *par une même grandeur* c, *rationelle ou irrationelle ; les quotiens* $\frac{a}{c}$ *&* $\frac{b}{c}$, *ſeront en même raiſon que les premieres grandeurs* a *&* b.

Il faut prouver que $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, ou, ayant ſuppoſé $\frac{a}{c} = p$, & $\frac{b}{c} = q$, que $p . q :: a . b$, ou afin que la conſequence ſoit en équation, que $bp = aq$.

La premiere équation (Axio. 1. Coroll. 4.) donne $a = cp$, & la ſeconde, $b = cq$, d'où l'on tire (Axio. 1. Coroll. 1.) $acq = bcp$, ou en diviſant par c, $aq = bp$; donc (Th. 2.) $p . q :: a . b$, ou $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a : b$, en remettant pour p, & pour q, leurs valeurs $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$. *C. Q. F. D.*

On pourroit démontrer ce Theorême en cette ſorte. L'hypotheſe $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, donne (Theor. 1.) $\frac{ab}{c} = \frac{ab}{c}$ qui eſt une équation évidente par elle-même.

2°. C'eſt auſſi par le moyen de ce Theorême que l'on réduit les raports ou fractions à leurs plus ſimples expreſſions. Ce qui ſe fait en diviſant l'antecedent & le conſequent de chaque raport par une même quantité, que l'on nomme, *commun diviſeur*, & les deux quotiens forment un autre raport, ou fraction égale à la propoſée, mais plus ſimple.

Or il eſt ſouvent aiſé d'apercevoir ce commun diviſeur, & particulierement quand les deux termes du raport que l'on veut réduire ſont incomplexes. Mais ſi on ne l'aperçoit pas par la ſeule inſpection des termes, on cherchera (art. 1. n°. 56, ou 57.) tous les diviſeurs de l'antecedent, & tous ceux du conſequent ; & les diviſeurs de l'antecedent qui ſe trouveront auſſi parmi ceux du

conſequent, ſeront des diviſeurs communs; mais on ne ſe ſervira que du plus grand: s'il ne s'en trouve aucun parmi ceux de l'antecedent, qui ſe trouve auſſi parmi ceux du conſequent, la fraction ne pourra être réduite à de plus ſimples termes.

EXEMPLES.

EXEMPLE 1. $\frac{aab}{ac}$ ſe réduit, ou eſt égal à $\frac{ab}{c}$ en diviſant chaque terme par leur commun diviſeur a.

Exemple 2. $\frac{abc\sqrt{abd}}{cx\sqrt{ag}} = \frac{ab\sqrt{bd}}{x\sqrt{g}}$ en diviſant les parties rationelles par c, & les irrationelles par $\sqrt{a}$.

Exemple 3. $\frac{abc\sqrt{abc}}{cd\sqrt{b}} = \frac{ab\sqrt{ac}}{d}$ en diviſant les parties rationelles par c, & les irrationelles par $\sqrt{b}$.

Exemple 4. $\frac{a^3}{a^3} = \frac{1}{1} = 1$, en diviſant les deux termes par a^3: Mais (art. 1. n°. 22.) $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$; donc $a^0 = 1$, ce que nous avions ſuppoſé dans l'endroit que nous venons de citer.

Exemple 5. $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$, en diviſant chaque terme par a^3: mais (art. 1. n°. 22.) $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ce que nous avions encore ſuppoſé au même endroit.

Exemple 6. $\frac{25ab}{15bc} = \frac{5a}{3c}$ en diviſant chaque terme par $5b$.

Exemple 7. $\frac{aac + abc}{aa + bb} = \frac{ac}{a - b}$, en diviſant chaque terme par leur commun diviſeur $a + b$.

Exemple 8. $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb} = \frac{aa + ab + bb}{a + b}$, en diviſant chaque terme par le commun diviſeur $a - b$.

THEOREME V.

34. *SI l'on diviſe une même quantité* a, *par des quantitez differentes* b *&* c, *les quotiens ſeront reciproquement proportionels à leurs diviſeurs.*

Il faut prouver que $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$, ou, ayant ſuppoſé $\frac{a}{b} = p$, & $\frac{a}{c} = q$, que $p . q :: c . b$, ou afin que la conſequence ſoit en équation, que $bp = cq$.

La premiere ſuppoſition donne $a = bp$, & la ſeconde $a = cq$; donc (Axio. 3.) $bp = cq$; & partant (Theor. 2.) $p . q :: c . b$, ou $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$, en remettant pour p, & pour q, leurs valeurs $\frac{a}{b}$, & $\frac{a}{c}$. *C. Q. F. D.*

On pourroit démontrer plus ſimplement ce Theorême : car la conſequence $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$ donne (Theor. 1.) $\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c}$, ou (art. 1. n°. 37.) $a = a$, ou, $a - a = 0$, ou $0 = 0$.

THEOREME VI.

35. *SI trois grandeurs* a, b, c, *ſont en proportion continue, la premiere* a, *ſera à la troiſiéme* c, *comme le quarré de la premiere* aa, *au quarré de la ſeconde* bb.

Il faut prouver que $a . c :: aa . bb$, ou, afin que la conſequence ſoit en équation, que $aac = abb$.

L'on a (Hyp.) $a . b :: b . c$; donc $ac = bb$, & partant $aac = abb$ en multipliant chaque membre par a. *C. Q. F. D.*

THEOREME VII.

36. *LORSQUE pluſieurs raports ſont égaux, comme* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$ &c. *La ſomme des antecedens* a + c + d, *eſt à la ſomme des conſequens* b + d + e, *comme celui qu'on voudra des antecedens, eſt à ſon conſequent.*

Il faut prouver que $a+c+d \,.\, b+d+e :: a \,.\, b$, ou, afin que la conſequence ſoit en équation, que $ab+bc+bd = ab+ad+ae$, ou en ôtant de part & d'autre le terme ab qui ſe détruit par la réduction, $bc+bd = ad+ae$.

Les deux premiers raports égaux (Hyp.) donnent $ad = bc$, le premier & le troiſiéme donnent $ae = bd$; donc (Axio. 1, Coroll. 1.) $bc+bd = ad+ae$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

37. IL ſuit de ce Theorême, que connoiſſant les deux premiers termes a & b, & le dernier c, d'une progreſſion geometrique, on trouvera aiſément la ſomme de tous les termes qui la compoſent: car nommant la ſomme des antecedens x; la ſomme des conſequens ſera $x-a+c$. Or par ce Theorême, $x \,.\, x-a+c :: a \,.\, b$; donc (Theor. 1.) $bx = ax - aa + ac$; ou, en tranſpoſant, & en ſuppoſant $a > b$, $ax - bx = aa - ac$; d'où l'on tire (Axio. 1. Cor. 5.) $x = \frac{aa-ac}{a-b}$. Ce qu'il falloit trouver.

Si $a > b$, ou ce qui eſt la même choſe, ſi la progreſſion va en diminuant, & qu'on la ſuppoſe infinie, en faiſant le dernier terme $c = 0$, l'on aura $x = \frac{aa}{a-b}$, pour la valeur de tous les termes de la progreſſion; car le terme ac ſe détruit à cauſe de $c = 0$.

THEOREME VIII.

38. *LA plus grande* a *de deux quantitez inégales* a *&* b *a un plus grand raport à une troiſiéme grandeur* c *que la plus petite* b; *& la même grandeur* c, *a un plus grand raport à la plus petite* b *qu'à la plus grande* a.

Il faut prouver, 1°. Que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2°. Que $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$.

L'on a par l'Hyp. $a > b$; donc (par le principe précedent, & ſes explications) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, en diviſant cha-

que membre de cette inégalité par c. Ce qu'il falloit premierement démontrer.

L'on a encore (Hyp.) $a > b$, donc en multipliant chaque membre de cette inégalité par c, & diviſant chaque membre par ab, l'on aura $\frac{ac}{ab} > \frac{bc}{ab}$, ou (art. 1. n°. 37.) $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$. Ce qu'il falloit en ſecond lieu démontrer.

Nous avons ſuppoſé dans la Multiplication, & dans la Diviſion, que $+ \times +$, & $- \times -$ donnoit $+$; & que $+ \times -$, ou $- \times +$ donnoit $-$. En voici la preuve, en ſuppoſant ſeulement que $+ \times +$ donne $+$, dont perſonne ne doute.

39. Soit $a - b$ à multiplier par $+c$. Je dis que le produit ſera $ac - bc$: car ayant ſuppoſé $a - b = p$; l'on aura en tranſpoſant $a = p + b$, & multipliant cette équation par $+c$, l'on aura $ac = pc + bc$; donc en tranſpoſant, $ac - bc = pc$; donc $a - b \times + c = ac - bc$.

40. Soit preſentement $a - b$ à multiplier par $- c$. Je dis que le produit ſera $- ac + bc$: car ayant ſuppoſé $a - b = p$, l'on aura en tranſpoſant $a = p + b$; donc en multipliant par $- c$, l'on aura (n°. 39.) $- ac = - pc - bc$, ou $- ac + bc = - pc$; donc $a - b \times - c = - ac + bc$.

41. Je dis auſſi que $\frac{ab}{-a} = -b$: car le produit du diviſeur par le quotient, doit donner le dividende, ce qui n'arriveroit pas ſi le quotient étoit $+b$: car $- a \times + b = - ab$, qui n'eſt point le dividende. Au contraire $- a \times - b = + ab$, qui eſt la quantité à diviſer.

42. Il eſt de-là évident que $\frac{ab}{-a} = \frac{-ab}{a}$, puiſque dans l'un & dans l'autre cas, le quotient doit être négatif, ce que nous avons auſſi ſuppoſé ailleurs.

REMARQUE.

1°. TOUT le Calcul algebrique eſt fondé ſur les trois Axiomes précedens, & ſur les quatre premiers Theorê-

mes que l'on vient de démontrer. On n'a démontré les quatre derniers que pour faire voir l'uſage de notre principe, & que par ſon moyen, on peut démontrer d'une maniere qui eſt toujours la même, toutes les proprietez des raports égaux, & inégaux, des proportions, & des progreſſions geometriques.

2°. L'on remarquera auſſi qu'en ſuivant le même principe, l'on démontrera avec la même facilité toutes les proprietez des raports, proportions, & progreſſions arithmetiques.

3°. Que l'équation qui exprime la conſequence ou la verité que l'on veut démontrer, peut toujours être délivrée de fractions, de ſignes radicaux, & réduite à ſes plus ſimples termes, avant que de chercher à lui rendre ſemblable celle qui renferme l'Hypotheſe : car une équation étant vraye dans un état, elle le ſera dans tous ceux qu'elle eſt capable de recevoir.

Il s'agit preſentement d'ajouter, ſouſtraire, multiplier, diviſer, & extraire les racines des raports, ou fractions.

ADDITION, ET SOUSTRACTION.

43. POUR les ajouter, on les écrira de ſuite ſans changer aucun ſigne ; & pour les ſouſtraire, on les écrira de ſuite en changeant les ſignes de celles qui doivent être ſouſtraites, ſoit que leur dénominateur ſoit le même, ou non. On leur donnera enſuite un même dénominateur ; & aprés avoir réduit (art. 1. n°. 11.) dans l'un & l'autre cas, les numerateurs ſemblables, on prendra pour la ſomme, ou pour la difference, celles des deux expreſſions qui ſera la plus ſimple.

EXEMPLES.

POUR ajouter $\frac{ab}{c}$ avec $\frac{ad}{c}$, l'on aura $\frac{ab+ad}{c}$. Pour ajouter $\frac{aab^4}{a^4-2aabb+b^4}$ avec $\frac{aabb}{aa-bb}$, l'on écrira $\frac{aab^4}{a^4-2aabb+b^4} + \frac{aabb}{aa-bb}$, ou aprés les avoir réduites en même dénomination

mination, $\frac{aab^4 + a^4bb - aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4} = \frac{a^4bb}{a^4 - 2aabb + b^4}$ (art. 1. n°. 11.) qui eſt une expreſſion plus ſimple que la premiere.

Pour ſouſtraire $\frac{ab}{c-d}$ de $\frac{aa-bb}{c}$, l'on écrira $\frac{aa-bb}{c} - \frac{ab}{c-d}$, ou, aprés leur avoir donné un même dénominateur $\frac{aac - bbc - aad + bbd - abc}{cc - cd}$. La premiere expreſſion eſt la plus ſimple.

MULTIPLICATION.

44. ON multipliera les numerateurs, & enſuite les dénominateurs l'un par l'autre ; & les deux produits formeront une fraction que l'on réduira à ſon expreſſion la plus ſimple.

Soit $\frac{ac}{b}$ à multiplier par $\frac{bc}{d}$. Ayant ſuppoſé $\frac{ac}{b} = p$, & $\frac{bc}{d} = q$. Il faut prouver que $\frac{abcc}{bd} = pq = \frac{acc}{d}$.

La premiere ſuppoſition donne $ac = bp$, & la ſeconde, $bc = dq$; donc (Axio. 1. Coroll. 1.) $abcc = bdpq$; donc (Axio. 1. Coroll. 5.) $\frac{abcc}{bd} = pq = \frac{abc}{d}$. *C. Q. F. D.*

De même $\frac{ab}{c} \times b + \frac{cd}{b}$, ou (Theor. 3. Coroll. 3.) $\frac{ab}{c} \times \frac{bb + cd}{b} = \frac{ab^3 + abcd}{bc} = \frac{abb + acd}{c}$, en diviſant les deux termes par b. Par la même raiſon $\frac{ab}{c} \times d$, ou $\frac{d}{1} = \frac{abd}{c}$.

DE'FINITION.

45. LE produit $\frac{ac}{bd}$ de deux raports differens $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; eſt appllé *raport compoſé*, *ou raiſon compoſée* ; & le produit $\frac{aa}{bb}$ d'un raport $\frac{a}{b}$, multiplié par lui-même, eſt appellé *raport doublé*, ou *raiſon doublée*.

Division.

46. Le produit du numerateur du dividende par le dénominateur du diviſeur ſera le numerateur du quotient, & le produit du dénominateur du dividende par le numerateur du diviſeur, ſera le dénominateur du quotient. On réduira enſuite le quotient à ſon expreſſion la plus ſimple.

Soit propoſé le rapport $\frac{ab}{c}$ à diviſer par $\frac{ac}{b}$. Ayant ſuppoſé $\frac{ab}{c} = p$, & $\frac{ac}{b} = q$. Il faut prouver que $\frac{acb}{acc} = \frac{p}{q} = \frac{bb}{cc}$.

La premiere ſuppoſition donne $ab = cp$; la ſeconde, $ac = bq$; donc (Axio. 1. Coroll. 1.) $\frac{ab}{ac} = \frac{cp}{bq}$, ou, en multipliant chaque membre par b, & diviſant chaque membre par c, $\frac{abb}{acc} = \frac{p}{q} = \frac{bb}{cc}$. *C. Q. F. D.*

De même $\frac{ac}{b}$ diviſé par d, ou par $\frac{d}{1}$, donne $\frac{ac}{bd}$.

Extraction.

Des racines des quantitez fractionnaires.

47. Il eſt clair par les regles de la multiplication des fractions, que pour extraire leurs racines, il n'y a qu'à extraire celle du numerateur, & celle du dénominateur & ces deux racines formeront une fraction, qui ſera la racine de la propoſée. Ainſi $\sqrt{\frac{2abbc}{4bcc}} = \frac{2b\sqrt{2ac}}{2c\sqrt{b}} = \frac{b\sqrt{2ac}}{c\sqrt{b}}$. Il en eſt ainſi des autres.

Les mêmes operations ſur les fractions irrationelles n'ont rien de particulier.

Fin de l'Introduction.

APPLICATION DE L'ALGEBRE A LA GEOMETRIE.

SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les définitions & les principes generaux qui ſervent pour reſoudre les Problêmes, & démontrer les Theorêmes de Geometrie.

DE'FINITIONS.

I. IL y a deux ſortes de propoſitions dans la Geometrie, auſquelles on peut appliquer l'Algebre, qui ſont les Theorêmes & les Problêmes.

1. Les Theorêmes ſont des propoſitions qui contiennent des verités Geometriques qui ne dépendent d'aucune operation, & qu'il faut ſeulement démontrer.

2. Les Problêmes ſont d'autres propoſitions qui demandent que l'on faſſe quelqu'operation, & que l'on démontre que l'operation que l'on a faite, ſatisfait à la queſtion. Ce qui s'appelle reſoudre le Problême.

Il y a des Problêmes déterminez, & d'autres indéterminez.

3. Les Problêmes déterminez ſont ceux qui n'ont qu'une ſeule ſolution, ou qu'un nombre determiné de ſolutions. Si l'on propoſe, par exemple, de couper une ligne donnée en deux également, on voit clairement que ce Problême ne peut avoir qu'une ſeule ſolution ; mais ſi
FIG. 1. l'on propoſe de couper une ligne donnée AB en un point C, en ſorte que le rectangle $AC \times CB$ ſoit égal au quarré d'une autre ligne donnée EF; il eſt clair que que ce Problême peut avoir deux ſolutions, & qu'il n'en peut pas avoir davantage: car ſi aprés avoir trouvé le point C qui ſatisfait à la queſtion, on la coupe encore en un autre point D qui ſoit autant éloigné de A que C l'eſt de B, le rectangle $AD \times DB$ ſera égal au rectangle $AC \times CB$ puiſque $AD = CB$, & $AC = DB$. Il eſt aiſé de voir qu'il n'y a point d'autre point qui puiſſe ſatisfaire au Problême.

4. Les Problêmesindéterminez ſont ceux qui ont une infinité de ſolutions: comme ſi l'on propoſe de diviſer une ligne donnée en deux parties ſans y admettre aucune autre condition, il eſt évident que tous les points de cette ligne ſatisfont au Problême. De même ſi l'on propoſe de trouver deux lignes dont le rapport ſoit égal à celui de deux autres lignes données ; l'on voit évidemment que les deux lignes que l'on cherche, peuvent être priſes d'une infinité de grandeurs differentes, & qui auront toûjours entr'elles le même rapport. Semblablement
FIG. 2. 5. Si l'on demande de trouver un point B ſur la circonference d'un demi cercle ABC, en ſorte que la perpenculaire BH, menée du point cherché B ſur le diametre AC ſoit moyenne proportionnelle entre les parties AH & HC du diametre AC. On ſçait que tous les points de la

circonference ont cette proprieté, c'eſt-à-dire que toutes les perpendiculaires, comme *BH* ſont moyennes proportionnelles entre *AH* & *HC* en quelqu'endroit que l'on prenne le point *B*.

DE'FINITION.

6. LES lignes droites ou courbes qui renferment, ou ſur leſquelles ſont tous les points qui reſolvent un Problême indéterminé, ſont appellez *lieux Geometriques*. Ainſi la demi circonference *ABC* eſt le lieu qui contient tous les points *B*, d'où l'on peut tirer des perpendiculaires *BH* moyennes proportionnelles entre *AH*, & *HC*.

AVERTISSEMENT.

7. *Quoique l'on ſe propoſe ici de donner la maniere de démontrer les Theorèmes de Geometrie par le moyen de l'Algebre; il ne faut pas entendre cela ſi generalement qu'il n'y en ait quelques-uns d'exceptez: car il y en a d'Elementaires où l'Algebre n'a point de priſe. On ne peut, par exemple, démontrer par l'Algebre que le quarré de l'hypothenuſe d'un triangle rectangle eſt égal aux deux quarrez des deux autres cotez, ni que les cotez homologues des triangles ſemblables ſont proportionnels. Il en eſt de même de pluſieurs autres; & c'eſt particulierement de ces deux Theorèmes que l'Algebre a beſoin, & par le moyen deſquels on vient à bout de tout, comme on verra dans toute l'étendue de cet Ouvrage. Soit qu'il s'agiſſe de reſoudre un Problème, ou de dénombrer un Theorème de Geometrie par le moyen de l'Algebre, il eſt toujours neceſſaire de trouver des équations & pour ce ſujet il faut nommer toutes les lignes connues, & inconnues qui y peuvent ſervir, par des lettres de l'Alphabet, avec cette difference que l'on nommera les données ou connues, ou déterminées, ou conſtantes par les premieres* a, b, c, d, &c. *& les inconnues ou indeterminées, ou variables par les dernieres*, r, ſ, t, u, x, y, z.

Et parcequ'il y a ſouvent pluſieurs chemins pour trouver les équations neceſſaires pour la démonſtration d'un Theorème, ou pour la réſolution d'un Problème, on pourroit prendre celui qui

ſe preſenteroit le premier s'ils conduiſoient tous à des équations également ſimples, & d'où l'on pût tirer des conſtructions également élegantes : mais comme l'on arrive quelquefois à des équations tres compoſées, en ſuivant certaines routes, & que l'on arriveroit à de tres-ſimples en en ſuivant d'autres ; il s'enſuit que lorſqu'on ne trouve pas les premieres équations auſquelles on eſt parvenu par les premieres ſuppoſitions, à ces ſimples, il en faut chercher d'autres par d'autres voyes, & ne ſe point rebuter : car lorſqu'un Problême eſt ſimple de ſa nature, on trouve ordinairement des équations ſimples pour le reſoudre : mais parceque pour trouver des équations ſimples, cela dépend particulierement des lignes que l'on nomme par des lettres inconnues, c'eſt-à-dire, qu'en nommant certaines lignes par des lettres inconnues, on arrive à des équations tres-compoſées, au lieu qu'en en nommant d'autres par les mêmes lettres inconnues, on arrive ſouvent à des équations tres-ſimples.

8. *On ne peut donner de regles préciſes pour déterminer parmi les lignes inconnues celles que l'on doit nommer par des lettres inconnues, pour parvenir aux équations les plus ſimples, ni pour tirer certaines lignes qui ſont neceſſaires tant pour la démonſtration des Theorêmes, que pour la réſolution des Problêmes, mais l'on peut faire certaines remarques, & établir certains principes qui ne laiſſent pas d'avoir un grand uſage dans l'un & l'autre cas. On les trouvera ailleurs.*

PRINCIPES GENERAUX

Pour appliquer l'Algebre à la Geometrie.

II. LORSQU'IL s'agit de reſoudre un Problême, ou de démontrer un Theorême de Geometrie, on doit premierement bien entendre ce dont il s'agit, c'eſt-à-dire l'état de la queſtion, & bien remarquer les qualitez des lignes qui doivent former la figure ſur laquelle on doit operer : car il y a des lignes données de poſition ſeulement ; d'autres données de grandeur, & de poſition tout enſemble ; d'autres données de grandeur, & non de poſition ; & d'autres enfin qui ne ſont données ni de grandeur ni de poſition.

1. Les lignes données de position ſeulement, ſont celles dont la ſituation eſt invariable & toûjours la même, mais dont la longueur n'eſt point déterminée : comme la ligne *EFG*, qui étant une fois poſée dans une ſituation perpendiculaire au prolongement du diametre *AC* d'un demi cercle *ABC*, à une certaine diſtance du point *C*, ne peut avoir aucune autre poſition.

Les lignes données de grandeur & de poſition tout enſemble, ſont celles qui ne peuvent changer de ſituation, & dont la longueur eſt déterminée, de ſorte qu'elles ne peuvent ni alonger ni acourcir : comme le diametre *AC* du demi cercle *ABC*, qui étant une fois poſé dans une ſituation perpendiculaire à la ligne *FG*, ne peut avoir aucune autre poſition.

Les lignes données de grandeur, & qui ne le ſont point de poſition, ſont celles dont la grandeur ne peut varier ; quoique leur ſituation puiſſe changer, comme le demi diametre *DB*, qui demeurent toûjours de même grandeur en quelqu'endroit de la circonference *ABC* que l'on prenne le point *B*. Les lignes données de grandeur ſont auſſi appellées lignes *connues* ou lignes *conſtantes*, & & on les nomme par des lettres connues, *a*, *b*, *c*, *d*, *&c.*

Les lignes qui ne ſont données ni de grandeur ni de poſition, ſont celles qui en changeant de places, changent auſſi de grandeur, comme la perpendiculaire *BH* qui changera de grandeur & de place autant de fois que le point *H* s'éloignera ou s'approchera du point *D*. Les lignes qui ne ſont données ni de grandeur ni de poſition, ſont auſſi appellées lignes *inconnues*, *indéterminées*, ou *variables*, & on les nomme par des lettres inconnues *x*, *y*, *z*, *&c.*

2. Lorſqu'on veut reſoudre un Problême, on le doit conſiderer comme déja reſolu, & ayant mené les lignes que l'on juge neceſſaires, l'on nommera celles qui ſont connues par des lettres connues, & celles qui ſont inconnues par des lettres inconnues, & ſans faire de diſtinction entre les quantitez connues & inconnues, on exami-

nera les qualitez de la queſtion, & l'on cherchera le moyen d'exprimer une même quantité en deux manieres differentes; & ces deux expreſſions d'une même quantité étant égalées l'une à l'autre, donneront une équation qui reſoudra le Problême, qui ſera déterminé, ſi elle ne renferme qu'une ſeule lettre inconnue.

Mais ſi elle renferme pluſieurs lettres inconnues, il faut tâcher par le moyen des differentes conditions du Problême de trouver autant d'équations que l'on aura employé de lettres inconnues, afin que les faiſant évanouir, de la maniere qu'il eſt enſeigné dans tous les livres d'Algebre, l'on ait enfin une équation qui n'en renferme qu'une ſeule; cette équation étant reduite, s'il eſt neceſſaire, à ſes plus ſimples termes par les manieres ordinaires expliquées dans les mêmes livres d'Algebre, donnera la ſolution du Problême qui ſera encore déterminé.

Si l'on ne peut trouver autant d'équations que l'on a employé de lettres inconnues, de ſorte qu'il reſte au moins deux inconnues dans la derniere équation, le Problême ſera indeterminé, & aura une infinité de ſolutions. Enfin, ſi dans la derniere équation il reſtoit trois ou un plus grand nombre de lettres inconnues, le Problême ſeroit encore indeterminé, mais il ſeroit d'une autre eſpece dont nous ne parlerons point.

Il eſt ſouvent facile de reconnoître par les qualitez d'un Problême, s'il eſt déterminé ou indeterminé; auquel cas on ſçait, ſi ayant employé deux inconnues, on doit trouver deux équations, ou ſi l'on n'en doit trouver qu'une ſeule: mais il arrive auſſi quelquefois que cela n'eſt pas ſi facile à diſtinguer, & c'eſt en ce cas qu'il faut tacher de trouver autant d'équations qu'on a employé d'inconnues, afin de déterminer par ce moyen la qualité du Problême.

On n'explique point plus au long ce principe; car tout ce Traité n'en eſt que l'application. On ſe contentera de faire ici quelques reflexions ſur les équations qui ne contiennent qu'une ſeule, ou deux lettres inconnues,

c'eſt-à-dire ſur les équations déterminées, & ſur les indeterminées.

DES EQUATIONS DE'TERMINE'ES.

3. ON ſçait que la lettre inconnue de ces équations, a autant de valeurs ou de racines, qu'elle a de dimenſions dans le terme où elle eſt le plus élevée, que ces valeurs ſont vrayes, fauſſes, ou imaginaires; on ne dit pas qu'elles ſoient toutes d'une même eſpece dans une même équation : car dans une même équation il y en a quelquefois des trois eſpeces, de vrayes, de fauſſes, & d'imaginaires.

Les racines vrayes ou poſitives ſont celles qui ſont precedées du ſigne + : comme $x = +a$:

Les racines fauſſes ou negatives ſont celles qui ſont precedées du ſigne — : comme $x = -a$. Les racines fauſſes ſont d'un grand uſage dans la Geometrie; car comme elles ſont autant réelles que les racines poſitives, elles ſervent à déterminer les poſitions des courbes autant que les poſitives, dont elles ne different qu'en ce que les poſitives devant être priſes d'un côté d'un point ou d'une ligne, les fauſſes doivent être priſes de l'autre, comme on verra dans la ſuite.

Les racines imaginaires ſont celles qui ſont ſous un ſigne radical avec le ſigne — : comme $x = \sqrt{-ab}$; & comme la valeur de ces racines ne peut être exprimée, on les regarde comme nulles ou $= 0$; de ſorte que $x = \sqrt{-ab}$. doit être regardée comme $x = 0$.

Dans toutes les équations où il n'y a que deux termes tous deux poſitifs, l'un connu & l'autre inconnu, ſi l'expoſant de l'inconnue eſt un nombre pair, elle aura deux valeurs réelles, l'une poſitive & l'autre negative; toutes les autres ſeront imaginaires. Par exemple, de $xx = aa$, l'on tire $x = +a$, & $x = -a$; car en quarrant les deux membres de ces deux équations l'on a toûjours $xx = aa$, puiſque $-\times-$ donne $+$ auſſi bien que $+\times+$, &

en general de $x^p = a^p$ (p ſignifie un nombre pair quelconque) l'on tire $x = \pm a$: ce qui ſe prouve comme on vient de faire, en élevant l'un & l'autre membre à la puiſſance paire p; car l'on aura toûjours $x^p = + a^p$.

Si l'un des termes eſt poſitif & l'autre negatif, toutes les valeurs de l'inconnue ſeront imaginaires : car on n'aura jamais le ſigne de $-$ aprés avoir élevé une quantité négative à une puiſſance paire : par exemple $-a$ élevé à une puiſſance paire p donnera toujours $+ a^p$, & jamais $- a^p$.

Si l'expoſant de l'inconnue eſt un nombre impair, l'inconnue n'aura qu'une racine réelle qui eſt poſitive, lorſque les deux termes des équations ſont poſitifs ; negative lorſqu'un d'eux eſt negatif, toutes ſes autres racines ſont imaginaires : par exemple, de $x^3 = a^3$, on tire $x = a$, & non pas $x = - a$, & de $x^3 = - a^3$, on tire $x = - a$ & non pas $x = a$; car le cube d'une grandeur poſitive eſt toûjours poſitif, & celui d'une quantité negative eſt toûjours negatif. Et en general de $x^q = + a^q$ (q ſignifie un nombre impair) on tire $x = + a$; de même, de $x^q = - a^q$ on tire $x = - a$: car $+ a$ élevé à une puiſſance impaire q donne $+ a^q$: & $- a$ élevé à une puiſſance impaire q donne toujours $- a^q$.

On fera les mêmes raiſonnemens ſur les équations compoſées : par exemple $xx = aa + bb$ donne $x = \pm \sqrt{aa + bb}$, $xx = aa - bb$ donne $x = \pm \sqrt{aa - bb}$: mais en ce cas ſi b ſurpaſſe a, les deux valeurs de x ſont imaginaires. $xx = \pm ax \mp bb$ donne $x = \pm \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa \mp bb}$: car en tranſpoſant l'on a $xx \mp ax = \mp bb$; & ajoûtant $\frac{1}{4} aa$ de part & d'autre pour rendre le premier membre quarré, l'on aura $xx \mp ax + \frac{1}{4} aa = \frac{1}{4} aa \mp bb$; donc en extrayant la racine quarrée de part & d'autre, l'on a $x \mp \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa \mp bb}$, ou $x = \pm \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa \mp bb}$. Il en eſt

ainſi

ainſi des autres. Mais il faut remarquer que ſi dans ce dernier exemple, & dans les ſemblables, bb a le ſigne de $-$, & que b ſurpaſſe $\frac{1}{2}a$, la valeur de x ſera imaginaire ; car puiſque la quantité $\frac{1}{4}aa-bb$ qui eſt ſous le ſigne *radical*, eſt alors negative $\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$ ſera une quantité *imaginaire* ; & par conſequent auſſi $\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$: car une quantité imaginaire étant combinée de quelque maniere que ce ſoit avec une quantité réelle, rend le tout imaginaire.

4. On connoît la nature d'un Problême déterminé par le plus haut degré, ou ce qui eſt la même choſe, par la plus haute puiſſance de l'inconnue, qui ſe trouve dans l'équation qui ſert à le réſoudre, en ſuppoſant que cette équation ſoit réduite à ſon expreſſion la plus ſimple. De ſorte que lorſqu'en reſolvant un Problême, on vient à une équation où l'inconnue n'a qu'une dimenſion : comme $x=\frac{ab}{c}$, qui eſt une équation du premier degré, le Problême eſt appellé *ſimple*.

Lorſqu'on trouve une équation où l'inconnue a deux dimenſions : comme $xx=ax+bb$, qui eſt une équation du ſecond degré, le Problême eſt nommé *plan*.

Lorſqu'on trouve une équation où l'inconnue a trois ou quatre dimenſions, comme $x^3=aab$, ou $x^4=a^3b$, qui ſont des équations du troiſiéme & du quatriéme degré, le Problême eſt nommé *ſolide*.

Lorſqu'on vient à une équation où l'inconnue eſt élevée au-delà du quatriéme degré, le Problême eſt nommé *lineaire*.

5. Quand une équation déterminée a tous ſes termes, le nombre en eſt plus grand de l'unité, que l'expoſant de la plus haute puiſſance de la lettre inconnue qu'elle

renferme. Ainſi une équation du ſecond degré ne peut avoir que trois termes ; une équation du troiſiéme degré, n'en peut avoir que quatre ; une du quatriéme, cinq ; & ainſi des autres. Mais il y manque ſouvent quelqu'un des termes moyens, quelquefois il en manque pluſieurs, & quelquefois ils y manquent tous.

Le premier terme d'une équation, eſt celui où l'inconnue eſt élevée à une puiſſance plus haute que dans tout autre terme. Le ſecond, eſt celui où elle eſt moins élevée d'une dimenſion. Le troiſiéme, celui où elle eſt moins élevée de deux dimenſions ; & ainſi de ſuite. Le dernier, eſt celui où elle ne ſe trouve point du tout.

Mais il faut remarquer qu'il ſe rencontre ſouvent dans une équation des termes *complexes*, ou compoſez de pluſieurs quantitez Algebriques, jointes enſemble par + ou par —, qui ſont ceux où l'inconnue ſe trouve élevée à la même puiſſance, ou bien ceux où elle ne ſe trouve point du tout. Par exemple, ces quantitez $axx - bxx + cxx$, ou $abb - bcc + d^2$, ne doivent être regardées que comme un ſeul terme.

On écrit ordinairement le premier terme d'une équation ſeul dans le premier membre, & tous les autres dans le ſecond, ſelon leur ordre ; ou bien on les égale tous à zero, en les écrivans tous dans le premier membre de l'équation, ſelon leur ordre ; & en écrivant o ſeul dans le deuxiéme, en obſervant que le premier ſoit toujours ſimple, & délivré de toute quantité connue, comme on voit dans l'équation ſuivante.

$$\begin{aligned} x^3 + bxx - abx + a^2. \\ - cxx + bcx - aab = 0. \\ + dxx \quad + bcc. \end{aligned}$$

DES EQUATIONS INDE'TERMINE'ES.

III. LES équations où il ſe rencontre deux lettres inconnues, qu'on appelle auſſi équations *locales*, ſervent

à conſtruire les Problêmes indéterminez, comme celles où il ne s'en rencontre qu'une ſervent à conſtruire les Problêmes déterminez. Mais parceque tant qu'il y a dans une équation deux lettres inconnues ; en les regardant comme telles, on ne peut connoître ni l'une ni l'autre. C'eſt pourquoi on eſt obligé d'aſſigner à l'une des deux, une valeur arbitraire ; & la regardant enſuite comme donnée, on pourra connoitre la valeur de l'autre.

Et comme on peut aſſigner à la même inconnue une infinité de valeurs l'une aprés l'autre, l'autre inconnue en pourra auſſi avoir une infinité. Mais en donnant ainſi differentes valeurs à une des inconnues d'une équation, on doit, à chaque fois, regarder cette équation comme une équation déterminée ; & par conſequent lui attribuer tout ce qu'on a dit dans l'Article précedent des équations déterminées. En effet, reſoudre, ou plûtôt conſtruire un Problême indéterminé, c'eſt conſtruire une infinité de fois un Problême determiné.

REMARQUE.

1. LES valeurs arbitraires que l'on aſſigne à une des lettres inconnues d'une équation indéterminée, doivent ſouvent être limitées, & être renfermées dans certaines bornes. Et ſi elles excedent ces bornes, les valeurs de l'autre inconnue, ſeront ou negatives ou imaginaires. Par exemple, dans cette équation $x = b - y$, toutes les valeurs arbitraires que l'on peut donner à l'inconnue y ne doivent point exceder la grandeur donnée b, autrement celles de x ſeroient negatives; ce qui eſt évident. Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = b$; & ſi l'on fait $y = b$, l'on aura $x = 0$; car l'équation deviendra $x = b - b = 0$. Dans cette équation $xx = aa - yy$, les valeurs arbitraires que l'on peut donner à l'inconnue y, ne doivent point exceder la grandeur donnée a : car autrement les valeurs de x ſeroient imaginaires, puiſque tout le ſecond membre de l'équation ſeroit negatif. Si l'on fait $y = a$, l'on aura

$xx = aa - aa = 0$. & ſi l'on faiſoit $y = 0$, l'on auroit $xx = aa$; donc $x = \pm a$. Mais dans cette équation $ax = by$, on peut donner telle valeur que l'on voudra à l'inconnue y : car x aura toujours une valeur poſitive, à moins que l'on ne face $y = 0$, auquel cas l'on aura $ax =$, ou $x = 0\frac{0}{a} = 0$.

THEOREME.

2. *SI l'on aſſigne à une des inconnues d'une équation indéterminée du premier degré, où elles ne ſont multipliées ni par elles-mêmes, ni entr'elles, tant de valeurs arbitraires qu'on voudra. Je dis que tous les points qui détermineront les valeurs correſpondantes de l'autre inconnue, ſeront dans une ligne droite.*

DE'MONSTRATION.

SOIT l'équation $ay = bx$, en la reduiſant en Analogie l'on a $a.b :: x.y$; ſoit preſentement une ligne droite AH, dont le point A ſoit fixe; & ayant pris ſur AH l'interval-
FIG. 3. le AB égal à la ligne donnée a, mené par le point B, la ligne BC égale à la ligne donnée b, qui faſſe avec AH tel angle qu'on voudra, & mené par A & C, la droite AC indéfiniment prolongée. Il eſt clair qu'ayant pris ſur AH un point quelconque D, mené DE parallele à BC; & nommé AD, x; & DE, y; l'on aura toujours $a.b :: x.y$, en quelqu'endroit de la ligne AH que l'on prenne le point D, ou ce qui eſt la même choſe, quelque grandeur arbitraire que l'on aſſigne à l'inconnue x, celle de y ſera toujours déterminée par la ligne AG. De ſorte que la ligne AG eſt lieu qui renferme tous les points qui ſatisferont au Problême, qui doit être reſolu par l'équation propoſée $ay = bx$ *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

3. SI l'équation propoſée étoit déterminée, comme $ay = bc$, ce ſeroit toujours la même choſe, excepté que la

lettre c qui tient la place de x, eſt conſtante ; ainſi ayant pris ſur AH, $AD = c$, & mené DE parallele à BC ; DE ſera la valeur de c ; mais en ce cas de tous les points de la ligne AG, il n'y a que le ſeul point E qui réſout le Problême, puiſque $AD = c$ ne peut avoir differentes valeurs.

COROLLAIRE II.

4. D'où l'on voit que les équations déterminées, & indéterminées du premier degré, ſont de même genre ; puiſqu'elles ſe conſtruiſent par les mêmes lignes, & de la même maniere.

COROLLAIRE III.

5. SI Dans l'équation précedente $ay = bx$, a étoit égale à b, elle deviendroit $y = x$; & il n'y auroit alors qu'à faire $BC = AB$; & aſſignant à x la valeur arbitraire AD ; DE (y) parallele à BC, ſeroit égale à $AD = x$.

COROLLAIRE IV.

6. IL eſt évident que dans toutes les équations indéterminées du premier degré, les inconnues ont entr'elles un rapport conſtant, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont l'une à l'autre comme une ligne donnée, à une ligne donnée, ou en raiſon d'égalité : comme dans l'équation précedente $ay = bx$, où $x.y :: a.b$, & dans celle-ci $y = x$, où $x.y :: 1.1$.

COROLLAIRE IV.

7. ON voit auſſi avec évidence que dans les équations indéterminées du premier degré, une des inconnues croiſſant ou diminuant, l'autre croît auſſi ou diminue ; qu'elles peuvent toutes deux augmenter ou diminuer à l'infini, en gardant toujours entr'elles le même rapport.

THEOREME.

8. *SI dans une équation indéterminée qui n'eſt point du premier degré, & où par conſequent les deux lettres inconnues ſont multipliées ou par elles-mêmes, ou entr'elles, de quelque maniere que ce puiſſe être, l'on aſſigne à l'une des deux tant de valeurs arbitraires qu'on voudra. Je dis que tous les points qui détermineront les valeurs correſpondantes de l'autre, ſeront dans une ligne courbe.*

DE'MONSTRATION.

DANS les équations à la ligne droite, les inconnues gardent toujours (n° 6) entr'elles un rapport conſtant. Or lorſque dans une équation, les deux lettres inconnues ſont multipliées ou par elles-mêmes, ou entr'elles, ou de l'une & de l'autre maniere tout enſemble; elles ou les lignes qu'elles expriment, ne peuvent garder le même rapport dans toutes les variations ou changemens de valeurs qu'elles peuvent recevoir: car il faudroit pour cela, que l'une des deux fût dans un des membres de l'équation, & l'autre dans l'autre, toutes deux ſeules, ou accompagnées ſeulement de lettres connues. Mais par l'hypotheſe, ces deux lettres ſont multipliées ou par elles-mêmes ou entr'elles; donc elles ne peuvent garder un rapport conſtant dans tous les changemens de valeur qu'on leur peut aſſigner: c'eſt pourquoi, en aſſignant tant de valeurs que l'on voudra à l'une des deux, les valeurs relatives de l'autre ne peuvent être déterminées par une ligne droite. Il faut donc qu'elles le ſoient par une ligne courbe. *C. Q. F. D.*

C'eſt ici la preuve generale, chaque équation en fournit de particulieres, en les comparant à l'équation à la ligne droite, comme on va voir par l'exemple qui ſuit.

EXEMPLE.

9. SOIT l'équation $yy = aa - xx$, qui eſt du ſecond degré; Il eſt clair, 1°. Que x croiſſant, y diminue : car le ſecond membre de l'équation devient d'autant plus petit, que x devient grande. 2°. On ne peut pas augmenter x en ſorte qu'elle ſurpaſſe la ligne exprimée par a : car le ſecond membre deviendroit negatif; & la valeur de y ſeroit par conſequent imaginaire. 3°. Si l'on fait $x = a$, l'équation deviendra $yy = aa - aa = 0$. Il eſt donc évident que cette équation ne ſe rapporte point à la ligne droite; puiſque ſes qualitez ſont toutes differentes de celles des équations du premier degré; & partant qu'elle ſe rapporte à une ligne courbe.

Pour déterminer & décrire cette courbe par le moyen de ſon équation $yy = aa - xx$. Soit une ligne droite CH, donnée de poſition dont l'extremité C ſoit fixe, & dont les parties CP ſoient nommées x; ſoit une autre ligne CG perpendiculaire à CH, & dont les parties CQ ſoient nommées, y; ſoit auſſi une ligne donnée KL nommeé, a; ayant mené PM parallele à CG, & QM parallele à CH; QM ſera $= CP = x$, & $PM = CQ = y$. FIG. 4.

Si l'on aſſigne preſentement tant de valeurs differentes qu'on voudra à l'une des inconnues x (CP) l'on déterminera par la Geometrie, les valeurs correſpondantes de y (PM). De ſorte que tous les points M ſeront à la courbe à laquelle ſe rapporte l'équation propoſée $yy = aa - xx$.

Suppoſons premierement $x = 0$; le point P tombera en C, & le point M, ſur la ligne CG; & effaçant dans l'équation, le terme xx, qui devient nul par la ſuppoſition de $x = 0$, l'on aura $yy = aa$, donc $y = \pm a$; c'eſt pourquoi ſi on prolonge CG du côté de C; & qu'on faſſe Ce, & CE chacun $= KL = a$; CE ſera la valeur poſitive de y, & Ce ſa valeur negative, & les points E & e, ſeront la courbe dont il s'agit.

Suppoſons en ſecond lieu $y = 0$, le point Q ſe con-

fondra avec le point C, le point M tombera ſur CH, & l'on aura $o = aa - xx$, ou $xx = aa$; donc $x = \pm a$; c'eſt pourquoi, ſi l'on prolonge CH du côté de C, & qu'on prenne de part & d'autre du point C, CB & CA chacune égale $KL = a$; CB ſera la valeur poſitive de x, & CA ſa valeur negative, & les points B & A, ſeront à la même courbe en queſtion. D'où l'on voit déja que les quatre points A, E, B, e, ſont également diſtans du point C.

Si l'on aſſigne à x une valeur quelconque CP moindre que CB pour déterminer la valeur de $PM = y$, l'on aura en extrayant la racine quarrée $y = \pm \sqrt{aa - xx}$ d'où l'on tire cette conſtruction. Ayant prolongé PM du côté de P ; du point C pour centre, & pour demi diametre l'intervalle $KL = a$, l'on décrira un cercle qui coupera PM en M & m ; PM ſera la valeur poſitive de y, & Pm ſa valeur négative, & les points M, m ſeront à la courbe cherchée ; car à cauſe du triangle rectangle CPM ; l'on a $PM^2 = CM^2 - CP^2$, c'eſt-à-dire en termes Algebriques $yy = aa - xx$; dont $y = \pm \sqrt{aa - xx}$.

Or il eſt évident que pour déterminer la valeur de y (PM) dans toutes les poſitions du point P, il faudra décrire un cercle du centre C, & du rayon KL ; c'eſt pourquoi ce cercle eſt lui-même la courbe cherchée ; ce qui d'ailleurs étoit facile à remarquer : mais on a jugé à propos de faire ſur l'équation au cercle, qui eſt la plus ſimple de toutes les courbes, les raiſonnemens que l'on vient de faire, pour donner une idée de ceux que l'on doit faire ſur les équations aux autres courbes, afin de les décrire par leur moyen, d'en marquer les principales déterminations, & d'en découvrir les principales proprietez.

COROLLAIRE

COROLLAIRE I.

10. ON voit clairement qu'au lieu d'avoir assigné à x, dans l'équation précedente, des valeurs CP prises sur CH pour trouver tous les points M, m, ou pour déterminer les valeurs correspondantes de $y = PM$, l'on auroit pû regarder x comme inconnue, & assigner à y des valeurs CQ prises sur CG, qui auroient servi à déterminer de la même maniere les valeurs correspondantes de $x = QM = CP$, en tirant de l'équation précedente, $x = \sqrt{aa - yy}$.

COROLLAIRE II.

11. IL est clair que si une des inconnues x de cette équation $yy = aa - xx$ devenoit une constante, la valeur de l'autre y pourroit de même être déterminée par le moyen du cercle; d'où il suit en general que toutes les équations déterminées du second degré peuvent être construites par le moyen du cercle, & qu'elles sont de même genre que les équations indéterminées du même second degré.

REMARQUE.

12. ON remarquera 1°. Que dans toutes les positions du point P, la ligne PM doit toujours demeurer parallele à CG; & que dans toutes les positions du point Q, la ligne QM doit toujours demeurer parallele à CH. 2°. Qu'il y a toujours deux points, l'un (P) sur CH, & l'autre (Q) sur CB, qui peuvent servir également à déterminer un même point (M). 3°. Que tout ce qu'on vient de dire du cercle se peut appliquer à toutes les autres courbes, lorsqu'il s'agit de les décrire par le moyen de leurs équations.

DEFINITIONS.

13. DANS toutes les courbes, les lignes droites (CH) dont au moins une des extremitez (C) est fixe, & dont

les parties (CP) ſont nommées par l'inconnue de l'équation à qui on donne des valeurs arbitraires (CP) pour déterminer la grandeur de la ligne (PM) exprimée par l'autre inconnue, ſont nommées *axes* ou *diametres* de ces courbes.

14. Les mêmes parties (CP) ſont nommées *abciſſes* ou *coupées*.

15. Les lignes (PM) exprimées par l'inconnue de l'équation dont on cherche la valeur en ſuppoſant l'autre inconnue comme donnée à chaque poſition du point P, & qui demeurent paralleles elles-mêmes, pendant que le même point P change de place, ſont nommées *appliquées*, ou *ordonnées* à l'axe CH.

16. Parceque QM eſt égale & parallele à CP, & CQ à PM, & que le point Q pris ſur CG peut ſervir à trouver le point M auſſi bien que le point P ; on peut prendre CG pour l'axe ou le diametre de la courbe ; CQ pour l'abciſſe, ou coupée ; & QM, pour l'appliquée ou ordonnée ; c'eſt pourquoi on nommera CH, & CG, *axes ou diametres conjuguez* ; CP & PM, ou CQ & QM enſemble *coordonnées* ; le parallelogramme $CPMQ$ formé par les coordonnées, le parallelogramme des coordonnées ; & le point C, le *commencement*, ou *l'origine* des coordonnées.

17. Les équations indéterminées ne ſervent pas ſeulement à conſtruire les Problêmes indéterminez, ou à décrire les courbes auſquelles elles ſe rapportent, & dont elles expriment la nature. On pourroit encore par leur moyen conſtruire tous les Problêmes déterminez : car il n'y a point de Problême déterminé, quelque ſimple qu'il puiſſe être, où pour le reſoudre, on ne puiſſe employer deux lettres inconnues, & trouver par conſequent deux équations indéterminées, qui étant conſtruites enſemble, ſelon les regles qu'on donnera dans la ſuite, les lignes droites ou courbes, auſquelles elles ſe rapportent, détermineroient par leur interſection les points qui ſatisferoient aux Problêmes, d'où l'on auroit tiré ces équa-

tions. On pourroit auſſi tirer de ces ſortes de conſtructions des démonſtrations tres-ſimples, à la maniere des Anciens. Mais il arriveroit quelquefois que les Problêmes ne ſeroient pas tous conſtruits avec les lignes les plus ſimples qu'ils le puiſſent être, quoique d'ailleurs la conſtruction en fût tres-ſimple. Or ſelon M^r *Deſcartes*, & ſelon la raiſon même, c'eſt un vice en Geometrie d'employer dans la conſtruction d'un Problême, des lignes plus compoſées que celles qu'exige ſa nature.

On trouvera dans l'art. 4. n°. 17, 18, 19, 20 & 21. des regles pour faire connoître quand un Problême determiné peut être conſtruit par le moyen de deux équations indéterminées. En voici pour diſtinguer les courbes les plus ſimples d'avec les plus compoſées.

18. C'eſt le degré d'une équation indéterminée qui fait connoître que la courbe dont elle exprime la nature eſt plus ou moins ſimple. Et le degré d'une équation eſt déterminé par la plus haute puiſſance de celle des deux inconnues, qui eſt la plus élevée, lorſqu'elles ne le ſont pas également, ou par le produit des deux inconnues, quand il s'y rencontre, & qu'il a plus de dimenſions que les mêmes inconnues dans les autres termes. Ainſi lorſque dans une équation, l'une ou toutes les deux inconnues, ſoit qu'elles ſoient multipliées, ou par elles-mêmes, ou entr'elles, ont deux dimenſions; comme $ax = yy$, ou $ax - xx = yy$, ou $xy = ab$; l'équation eſt du *ſecond degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, eſt du *premier genre*.

Lorſque l'une ou toutes les deux, ou leur produit, a trois dimenſions: comme $x^3 + axy = a^3$, ou $x^3 - axy = y^3$, ou $xxy = ayy + a^3$, l'équation eſt du *troiſiéme degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, eſt du *ſecond genre*, & ainſi de ſuite. Or on convient que les courbes du premier genre ſont plus ſimples que celles du ſecond; & celles-ci plus que celles du troiſiéme, *&c.* C'eſt pourquoi ce ſeroit un vice de conſtruire un Problême par le moyen d'une courbe du ſecond genre, lorſqu'il peut être con-

ſtruit par le moyen d'une courbe du premier. Il en eſt ainſi des autres genres.

REMARQUE.

19. LORSQU'ON décrit une courbe par le moyen de ſon équation, on regarde une des lettres inconnues qu'elle renferme, comme donnée à chaque fois qu'on change ſa valeur pour déterminer la valeur correſpondante de l'autre; on doit donc auſſi regarder à chaque fois l'équation, comme une équation déterminée; & parceque les équations déterminées, ſont d'autant plus faciles à conſtruire, que leurs inconnues ont moins de dimenſions; il eſt à propos dans les équations indéterminées, où les inconnues ne ſont pas également élevées, de prendre pour conſtante, celle qui a plus de dimenſions; & pour inconnue, celle qui en a moins.

Et puiſque trouver un point d'une courbe, c'eſt réſoudre un Problême déterminé; lorſque dans une équation indéterminée, l'inconnue que l'on ne prend point pour conſtante, n'aura qu'une dimenſion; la deſcription de la courbe dépendra de la conſtruction des Problêmes ſimples déterminez. Lorſque cette inconnue aura deux dimenſions; la deſcription de la courbe dependra de la conſtruction des Problêmes plans; lorſqu'elle en aura trois ou quatre, la deſcription de la courbe dépendra de la conſtruction des Problêmes ſolides; & lorſqu'elle en aura un plus grand nombre, la deſcription de courbe dépendra de la conſtruction des Problêmes lineaires.

On remarquera auſſi que toutes les operations que l'on fait en Geometrie, dépendent de la Geometrie plane, c'eſt-à-dire de la conſtruction des équations déterminées du premier, & du ſecond degré; c'eſt pourquoi lorſque l'inconnue que l'on ne prend point pour conſtante dans une équation indéterminée, aura plus de deux dimenſions, on ne pourra conſtruire cette équation par elle-même, il la faudra changer en deux autres équations, où l'une

des inconnues n'excede point deux dimenſions ; & par le moyen de ces deux équations, on décrira les deux courbes dont elles exprimeront la nature, & leur interſection ſera un des points de la courbe dont l'équation propoſée exprime la nature.

En déterminant le genre des courbes, comme on a dit (n°. 17.) on trouvera que le premier genre n'en renferme que quatre, qui ſont le cercle, la parabole, l'ellipſe, & l'hyperbole. De ſorte que toutes les équations du ſecond degré appartiennent à quelqu'une de ces quatre courbes. Mais comme le cercle, à cauſe de ſa deſcription qui eſt tres-ſimple, paſſe pour la plus ſimple des quatre, ce ſeroit encore un vice en Geometrie, d'employer une des trois autres, lorſque le cercle peut être employé.

C'eſt parceque l'on conſtruit la plus grande partie des Problêmes de Geometrie par le moyen de ces quatre courbes, que je me ſuis déterminé à donner dans cet Ouvrage les élemens de la parabole, de l'ellipſe & de l'hyperbole, les proprietez du cercle étant aſſez connues d'ailleurs, afin de n'y ſuppoſer que les ſimples élemensde Geometrie.

Les Geometres diſtinguent deux ſortes de courbes ; les courbes *Geometriques*, & les courbes *Méchaniques*.

20. Les courbes geometriques, ſont celles dont les axes ou les diametres conjuguez, & les coordonnées ſont des lignes droites, qui peuvent toujours former un parallelogramme, que nous avons nommé (n°. 16.) le parallelogramme des coordonnées, & qui ont des équations reglées qui expriment le raport que ces coordonnées ont entr'elles ; & dont on peut trouver par le moyen de ces équations, non ſeulement tous les points, mais tel point qu'on voudra, indépendamment des autres.

21. Les courbes méchaniques ſont celles dont les coordonnées ne ſont point toutes deux droites, ou, dont l'une des coordonnées les rencontrent en une infinité de points. Et comme dans l'équation qui exprime la nature d'une courbe, l'une des deux lettres inconnues doit avoir au

moins autant de dimenſions, qu'il y a de points où la ligne exprimée par cette inconnue rencontre la courbe, il faudroit que dans les équations de ces courbes, au moins une des inconnues eut une infinité de dimenſions, ce qui eſt impoſſible.

AVERTISSEMENT.

22. *Avant Mr Deſcartes, on ne prenoit pour Geometrique que ce qui ſe faiſoit par le moyen du cercle, & de la ligne droite, & tout ce qui ſe faiſoit par d'autres courbes étoit reputé méchanique. Mais Mr Deſcartes, & aprés lui tous les nouveaux Geometres, ont pris pour Geometrique, tout ce qui ſe fait par le moyen des courbes Geometriques. Et les mêmes Auteurs ne prennent pour méchanique, que ce qui ſe fait par le moyen des courbes méchaniques.*

OBSERVATIONS
Pour l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

IV. VOICI les Remarques ou Obſervations dont on a parlé dans le premier Article, n°. 8.

1. Lorſqu'on veut réſoudre un Problême, il faut toujours employer deux lettres inconnues, pour nommer deux lignes indéterminées, qui ayent leur origine en un point fixe, & qui faſſent toujours un angle conſtant, c'eſt-à-dire, que la ligne nommée par l'une des lettres inconnues, croiſſant ou diminuant; celle qui eſt nommée par l'autre lettre inconnue, demeure toujours parallele à elle-même, ou à quelque ligne donnée. Ainſi, lorſqu'on a nommé (art. 3. n°. 9.) CP, x; & PM, y; l'on a eu égard à cette Obſervation. De même le demi cercle AMB étant donné; s'il étoit queſtion de déterminer le point M ſur ſa circonference; ayant abaiſſé la perpendiculaire MP, l'on pourroit nommer indifferemment AP, ou CP, ou BP, x; car les points A, C, & B ſont fixes; & PM, y. Et ſi le Problême eſt déterminé, on trouvera deux équations indéterminées; mais on n'en trouvera qu'une ſeule, s'il eſt indéterminé.

2. Si l'on employe plus de deux inconnues, il faut qu'il y en ait deux qui expriment des lignes, dont la

poſition ſoit telle qu'on vient de dire dans l'obſervation précedente ; on placera enſuite les autres, comme on voudra. Mais on peut preſque toujours ſe diſpenſer d'en employer plus de deux, en exprimant les autres lignes inconnues, dont on a beſoin, ou par la propriété du triangle rectangle, ou par celle des triangles ſemblables.

3. S'il y a un point donné B ſur un des côtez AH d'un angle donné GAH ; la droite BC perpendiculaire à AH, ou parallele à quelque ligne donnée de poſition, ſera donnée de grandeur & de poſition ; comme auſſi les intervalles AB, AC ; & partant ces lignes peuvent être nommées par des lettres connues a, b, c. Mais ſi le point B, eſt cherché, les lignes AB, BC, AC ſeront indéterminées, ou variables : & l'on en pourra nommer deux AB & BC, ou AC & BC par deux lettres inconnues x, & y : car elles ont les qualitez requiſes par la premiere Obſervation. FIG. 3.

4. S'il y a un point donné D hors d'une ligne AB donnée de poſition & de grandeur, la ligne DC perpendiculaire à AB, ou parallele à quelque ligne donnée de poſition, & les deux parties AC, CB, de la ligne AB ſeront auſſi données de grandeur & de poſition. Mais ſi le point D eſt cherché, les lignes DC, AC, & CB ſeront variables, & l'on pourra nommer une des parties AC, de la donnée AB, x ; CD y ; & CB (ayant nommé AB, a) ſera $a-x$. FIG. 5.

5. Un angle GAH, & un point B au dedans de cet angle (Fig. 6), ou au dehors (Fig. 7) étant donnez de poſition; les paralleles BC, BD, ou leurs égales AC, AD, ſeront auſſi données, & on les pourra nommer a & b: mais ſi le point B eſt cherché, les paralleles AC, AD, ſeront inconnues, & on les pourra nommer x, & y. FIG. 6. 7.

6. Ce ſeroit la même choſe, ſi le point B étoit donné ou cherché ſur une courbe donnée HBG, dont AG, & AH ſont les deux axes, ou deux diametres conjuguez : mais le point B étant cherché, on pourroit nommer GC, & CB, ou HD, & DB, ou (ſi la courbe rencon- FIG. 8.

troit encore CG prolongée en un point F) FC, & CB, x & y.

FIG. 8. 7. Lorſqu'on détermine par une operation repetée, pluſieurs points B ſur un plan où il y a des lignes qui ſervent à déterminer tous ces points, & qu'on veut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe ſur laquelle les mêmes points ſe doivent rencontrer, il faut toujours nommer par une lettre inconnue, quelque ligne; comme BC, qui part d'un des points B, & qui étant parallele à quelque ligne donnée AH, rencontre une autre ligne AG donnée de poſition en quelque point C, & nommer par une autre lettre inconnue quelque partie de la ligne AG compriſe entre le point variable C, & quelque point fixe A, ou G.

FIG. 9. 8. Un angle GAH, & un point fixe D hors de cet angle, étant donnez de poſition ſur un plan; s'il s'agit de mener une ligne DEF par quelque point cherché E ou F ſur un des côtez de cet angle, dans de certaines conditions, les parties AE, AF ſeront inconnues, & pourront être nommées x, & y: mais les paralles DB, DC, aux côtez AH, AG, ou leurs égales AC, AB ſeront données, & pourront être nommées, a, & b.

9. Si l'on eſt obligé de tirer des lignes autrement que ſelon les regles contenues dans les Obſervations precedentes; on les tirera de maniere qu'elles forment plûtôt dans la figure, ſur laquelle on opere, des triangles ſemblables, que des triangles rectangles: car les triangles ſemblables donnent des équations plus ſimples que les triangles rectangles.

10. La proprieté du triangle rectangle, & des triangles ſemblables, donnent preſque toutes les équations dans leſquelles on tombe, en appliquant l'Algebre à la Geometrie.

11. Les hypothenuſes des triangles rectangles doivent toujours être exprimées par le moyen des deux côtez qui forment l'angle droit, à moins qu'elles ne ſoient données de grandeur. Ainſi les deux côtez étant nommez x

& y, l'hypothenuſe ſera $\sqrt{xx+yy}$.

12. On ne doit jamais nommer les lignes égales, ou qui doivent être égales, par des lettres differentes.

13. S'il y a de la difficulté à employer, & à nommer des lignes qui ſemblent neceſſaires à la reſolution d'un Problême ; on pourra employer en leur place d'autres lignes, pourvû qu'elles ayent entr'elles le même rapport. Par exemple, en ſuppoſant que BC, & DE ſoient paralleles, s'il s'agit d'employer AB, & BD ; & que AC, & CE ſoient nommées ; on pourra employer AC, & CE au lieu de AB, & BD ; puiſque $AC.CE :: AB.BD$. FIG. 3.

14. On abrege le calcul, & on trouve ſouvent des équations plus ſimples, en prenant pour l'origine des inconnues le point qui diviſe par le milieu une ligne donnée de grandeur : & l'on tombe par ce moyen dans un principe tres-connu, & qui eſt ſouvent d'un grand ſecours dans l'Application de l'Algebre à tous ſes uſages. Le voici.

15. La moitié de la ſomme de deux grandeurs, plus la moitié de leur difference eſt égale à la plus grande ; & la moitié de la ſomme de deux grandeurs, moins la moitié de leur difference eſt égale à la plus petite. Ainſi, nommant la ſomme $2m$, & la difference $2n$; la plus grande ſera $m+n$, & la plus petite $m-n$.

16. Il n'eſt pas neceſſaire de prendre tant de précautions, pour nommer les lignes de la figure ſur laquelle on opere, quand il s'agit de démontrer un Theorême : car comme il n'y a point de lignes dont il ſoit neceſſaire de déterminer la longueur, on les peut toutes nommer par telles lettres qu'on voudra, connues, ou inconnues : mais on doit toujours ſuivre les regles précedentes pour tirer les lignes neceſſaires.

On conſidere neanmoins quelquefois les Theorêmes qu'on veut démontrer, comme des Problêmes à reſoudre. Et en ce cas, on peut ſuivre les principes précedens.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces Observations peuvent apporter beaucoup de facilité pour trouver des équations dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie: mais la premiere & la septiéme sont les plus considerables de toutes; car en suivant ce qui y est prescrit, les Problèmes indéterminez, seront toujours resolus par la voye la plus simple, ou plûtôt par la seule voye naturelle; c'est pourquoi si en ce cas, on avoit employé plus de deux inconnues, il faudroit faire évanouir celles qui expriment des lignes dont la position n'est point conforme à ce qui est dit dans ces deux Observations. Mais parcequ'on ne peut pas construire tous les Problèmes déterminez par le moyen de deux équations indéterminées, pour les raisons que l'on a dites art. 3. n°. 17; on est quelquefois obligé d'abandonner ces deux Observations. Voici à peu prés ce qu'il y a à observer, quand on les veut suivre.

17. Quand en résolvant un Problême avec deux inconnues, suivant la premiere Observation, on trouvera deux équations indéterminées; le Problême sera déterminé, & on le pourra construire avec ces deux équations, si elles se rapportent toutes deux à la ligne droite, ou l'une à ligne droite, & l'autre au cercle, ou toutes deux au cercle; car il n'y a point de lignes plus simples que la droite, & la circulaire.

18. Si l'une de ces deux équations indéterminées se rapporte au cercle, & que l'autre soit du second degré, il faudra faire évanouir l'une des deux inconnues, & si l'équation déterminée qui en resulte, n'est point du premier, ou du second degré, on examinera si elle ne peut point être divisée par quelque binome composé de quelqu'un des diviseurs du dernier terme, & d'une puissance du premier qui lui soit égale, pour la réduire, si cela se peut, à une équation déterminée du second degré. Si par ce moyen on n'y réussit point, il faudra, si elle est du quatriéme degré, faire évanouir le second

terme, la transformer en une équation du troiſiéme, & voir ſi elle ne peut point enſuite être diviſée par quelque binome, compoſé d'un des diviſeurs de deux dimenſions du dernier terme, & du quarré de l'inconnue qu'elle renferme; & la réduire par ce moyen à une équation du ſecond degré. Mais ſi l'on ne trouve aucun binome plan, qui puiſſe diviſer l'équation transformée, le Problême ſera ſolide, & on pourra le conſtruire avec les deux équations indéterminées, de la maniere qu'on dira dans la neuviéme Section; & la conſtruction ſera même beaucoup plus ſimple, & plus élegante que celle qu'on tireroit de l'équation déterminée, qui reſulte de l'évanouiſſement de l'une des inconnues, comme on pourra voir en comparant les conſtructions des Problêmes ſolides de la neuviéme Section, avec celles de la dixiéme.

19. Si par la ſeule diviſion l'équation déterminée peut être réduite à une équation du ſecond degré, le Problême ſera plan, & on le conſtruira par le moyen de l'équation réduite à deux dimenſions, comme on enſeignera dans la Section ſuivante.

Si pour réduire l'équation déterminée à une équation du ſecond degré, il faut employer la transformation, on pourroit encore le conſtruire par le moyen de l'une des deux équations du ſecond degré que l'on en tire: mais la conſtruction en ſera beaucoup plus ſimple, ſi en abandonnant ce qui eſt dit dans la premiere Obſervation, on prend d'autres lignes pour inconnues, & que l'on en tire de nouvelles, ſelon qu'on le jugera neceſſaire, & que par ce moyen on puiſſe venir à une équation déterminée du ſecond degré. Et ſi l'on n'y réuſſit pas du premier coup, il faudra encore tenter d'autres voyes; car quand un Problême eſt ſimple, on peut trouver une équation ſimple, & conforme à ſa nature, ſoit d'une maniere, ſoit d'une autre.

20. Si aucune des deux équations indéterminées ne ſe rapporte point au cercle, & n'y puiſſe être réduite par la combinaiſon de l'une avec l'autre, ou autrement;

& que l'équation qui réſulte de l'évanouiſſement de l'une des inconnues, ſoit du troiſiéme ou du quatriéme degré, & ne puiſſe être réduite par la diviſion, ou par la transformation à une équation du ſecond degré; il faudra par ſon moyen conſtruire le Problême, comme il ſera enſeigné dans la dixiéme Section : car il ſera neceſſairement ſolide; & quand on chercheroit d'autres équations par d'autres voyes, elles ne pourroient être plus ſimples que par leurs termes, un Problême ne pouvant jamais changer de nature.

21. Enfin ſi l'équation qui réſulte de l'évanouiſſement de l'une des deux lettres inconnues renfermées dans les deux équations indéterminées, excede le quatriéme degré, & n'y puiſſe être réduite par la diviſion; le Problême ſera lineaire, & on le conſtruira par le moyen des deux équations indéterminées, comme on dira dans la douziéme Section.

22. La raiſon de tout ceci, eſt que pour conſtruire les Problêmes ſimples, & plans, on ne doit employer que la ligne droite & le cercle; puiſqu'on le peut toûjours. Et ſi on les conſtruiſoit par le moyen des deux équations indéterminées que l'on trouve en employant deux lettres inconnues, on y employeroit ſouvent d'autres courbes, qui ne ſont pas ſi ſimples que le cercle.

Pour conſtruire les Problêmes ſolides dont les équations ſont du troiſiéme ou quatriéme degré, on ne doit employer que le cercle, & une courbe du premier genre, puiſque cela ſe peut auſſi toujours.

Mais parceque pour conſtruire les Problêmes lineaires, dont les équations excedent le quatriéme degré, l'on ne peut faire ſervir le cercle; leur conſtruction ſera plus ſimple par le moyen des deux équations que l'on trouve en employant deux inconnues, ſelon la premiere Obſervation, que de toute autre maniere : car, à mon avis, c'eſt en quelque façon gêner la Geometrie que d'y introduire, ſouvent avec beaucoup de difficulté, de certaines courbes préferablement à d'autres.

qui ſe préſentent naturellement, & dont la deſcription eſt ſouvent tres-ſimple : en quoi je voudrois que les courbes fuſſent préferées, ſans avoir égard à leur genre, de la maniere qu'on le détermine ordinairement.

AVERTISSEMENT.

Lorſqu'on ſçait qu'un Problème eſt ſimple, ou plan, il n'eſt point neceſſaire d'avoir égard à la premiere obſervation, ni d'employer deux lettres inconnues pour le reſoudre. Il y a auſſi des Problèmes ſi ſimples, qu'il n'y a aucune difficulté, ni pour nommer les lignes, ni pour trouver des équations.

Tout ce qu'on a dit dans cette premiere Section ſera éclairci par toute la ſuite de cet Ouvrage, qui n'en eſt que l'Application, & un Commentaire.

SECTION II.

Où l'on donne la maniere d'exprimer Geometriquement les quantitez Algebriques, & de reſoudre les Problêmes ſimples, & plans; ou ce qui eſt la même choſe, de conſtruire les équations déterminées du premier & du ſecond degré.

V. ON peut exprimer Geometriquement toutes les quantitez Algebriques, par le moyen des quatre operations ſuivantes, qui ſont de trouver des troiſiémes, quatriémes, & moyennes proportionnelles, & de tirer les racines de la ſomme, ou de la difference de deux ou de pluſieurs quarrez.

1. Pour exprimer Geometriquement $\frac{ab}{c}$; ayant mené une ligne droite AH, dont l'extremité A ſoit fixe, fait $AB=c$, $AD=a$, mené $BC=b$, qui faſſe avec AB un angle quelconque ABC, s'il n'eſt pas determiné d'ailleurs, & mené ACG; la ligne DE parallele à BC ſera $\frac{ab}{c}$: car à cauſe des paralleles BC, DE, l'on aura $AB\ (c).AD\ (a)::BC\ (b).DE=\frac{ab}{c}$. Ce ſeroit la même choſe s'il falloit exprimer geometriquement $\frac{aa}{c}$: car il n'y auroit qu'à faire $BC=AD=a$, aprés avoir fait $AB=c$; où l'on remarquera que toute quantité fractionaire peut être regardée comme le quatriéme terme d'une proportion qui renferme les trois autres, & dont le dénominateur eſt le premier.

FIG. 3.

De même pour exprimer geometriquement $\frac{aa+ab}{c+d}$; en réduiſant en proportion l'on a $c+d . a+b :: a . \frac{aa+ab}{c+d}$. Faiſant donc $AB = c+d$, $AD = a+b$, $BC = a$; DE parallele à BC, ſera $= \frac{aa+ab}{c+d}$. Ce ſera la même choſe ſi l'on veut exprimer geometriquement $\frac{aa-bb}{c}$: car en réduiſant en proportion l'on a $. c . a+b :: a-b . \frac{aa-bb}{c}$. Semblablement, pour exprimer geometriquement $\frac{aab}{cd}$ qui contient deux proportions, $c . a :: a . \frac{aa}{c}$, & $d . b :: \frac{aa}{c} . \frac{aab}{cd}$, l'on exprimera d'abord $\frac{aa}{c}$, comme on vient de voir pour les quantitez précedentes, & enſuite $\frac{aab}{cd}$. Il en eſt ainſi des autres quantitez fractionnaires.

2. Pour exprimer geometriquement $\sqrt{ab}$. Il faut prendre ſur une ligne droite AH, $AD = a$, & $DB = b$, & ayant décrit un demi cercle ſur le diametre AB; la perpendiculaire DE au point D, ſera égale à $\sqrt{ab}$: car nommant DE, x; l'on aura $a\ (AD) . x\ (DE) :: x\ (DE) . b\ (DB)$; dont $xx = ab$, & $x = \sqrt{ab}$. De même pour exprimer $\sqrt{aa+ab}$, on voit que $aa+ab$, eſt la produite de $a+b$; par a. Ainſi ayant fait $AD = a+b$, & $DB = a$; DE, ſera $\sqrt{aa+ab}$. FIG. 10.

Semblablement, pour exprimer $\sqrt{aa-bb}$; puiſque $aa-bb$, eſt le produit de $a+b$ par $a-b$, en faiſant $AD = a+b$, & $DB = a-b$; DE ſera $= \sqrt{aa-bb}$. On peut encore exprimer autrement cette quantité, comme on va voir n°. 3.

Pour exprimer $\frac{m}{n}\sqrt{aa-bb}$; ayant trouvé, comme on vient de faire $DE=\sqrt{aa-bb}$, & l'ayant nommée; c, l'on aura $\frac{mc}{n}$ au lieu de $\frac{m}{n}\sqrt{aa-bb}$, & l'on trouvera

FIG. 3. (n°. 1.) $DE=\frac{mc}{n}$, faisant $AB=n$, $BC=m$, & $AD=c$.

3. Pour exprimer geometriquement $\sqrt{aa+bb}$. Puisque $aa+bb$ est la somme de deux quarrez, il est clair que
FIG. 11. si l'on décrit un triangle ABC rectangle en B , un de ses côtez AB étant nommé a; & l'autre BC b; l'hypothenuse AC sera $=\sqrt{aa+bb}$. Il ne seroit pas plus difficile d'exprimer la racine de la somme de plusieurs quarrez, comme $\sqrt{aa+bb+cc}$, &c.

Pour exprimer geometriquement $\sqrt{aa-bb}$, qui est la difference de deux quarrez; il est évident qu'ayant décrit un triangle rectangle dont l'hypotenuse soit $=a$ racine du quarré positif, & un des côtez $=b$ racine du quarré négatif, l'autre côté sera $=\sqrt{aa-bb}$. Ce qui
FIG. 12. se fait en cette sorte; soit décrit sur le diametre $AB=a$, le demi cercle ACB, & soit inscrit dans le demi cercle la ligne $AC=b$, & mené CB; l'angle ACB, étant droit à cause du demi cercle; CB sera $=\sqrt{aa-bb}$. La même chose s'exécute encore en la maniere suivante. Soit dé-
FIG. 13. crit un demi cercle sur le diametre $AB=2a$, élevée au centre C la perpendiculaire CH, prise $CG=b$ racine du quarré negatif, menées EF, & FD paralleles à AB, & à HC, & mené le rayon CF; GF ou CD sera $=\sqrt{aa-bb}$; puisque $CF=a$, & CG, ou $DF=b$. Cette derniere maniere convient mieux à la construction des équations que la precedente.

4. Il

4. Il y a des quantitez Algebriques plus composées que celles dont on vient de parler (n°. 1, 2, 3,) & que l'on ne peut exprimer geometriquement, qu'aprés y avoir fait certains changemens. Or ces changemens consistent particulierement à mettre l'expression Algebrique d'un quarré en la place de l'expression Algebrique d'un rectangle, ou de mettre l'expression Algebrique d'un rectangle dont un côté soit donné en la place d'un autre rectangle, ou d'un quarré. Ainsi pour exprimer geometriquement cette quantité fractionnaire $\frac{aa+bb-cd}{b}$, dont le numerateur n'est point le produit de deux quantitez que l'on puisse separer par la division, & qui ne peut par consequent être réduite en analogie; il faut donc changer le quarré Algebrique bb, en un rectangle dont un côté soit a, & le rectangle Algebrique cd, en un autre rectangle Algebrique, dont un côté soit aussi a, afin que la lettre a se trouve dans tous les termes. Soit pour ce sujet x, le côté du rectangle qui doit être égal à bb, dont l'autre côté est la ligne donnée, exprimée par a; l'on aura, selon les termes de la question, $ax = bb$; donc $x = \frac{bb}{a}$; ayant donc (n°. 1) exprimé geometriquement $\frac{bb}{a}$; & l'ayant nommée f; l'on aura $f = x$; & partant $af = bb$. Soit semblablement y le côté du rectangle qui doit être égal à cd, dont l'autre côté est la même donnée a; l'on aura $ay = cd$; donc $y = \frac{cd}{a}$: & ayant nommé g l'expression de $\frac{cd}{a}$ trouvée (n°. 1); l'on aura $ag = cd$; la quantité précedente sera donc changée en celle-ci, $\frac{aa+af-ag}{b}$, en mettant pour bb, & pour cd, leurs valeurs af, & ag que l'on vient de trouver, qui est facile à exprimer; puisqu'on la peut à present réduire

en l'analogie ſuivante $b.a :: a+f-g. \frac{aa+af-ag}{b}$. On auroit pû changer le quarré aa, & le rectangle cd, au lieu que l'on a changé bb, & cd.

5. Pour exprimer la quantité $\sqrt{aa-bc}$, il faut changer le quarré aa en un rectangle, dont un côté ſoit b ou c; ou bien le rectangle bc en un autre, dont un côté ſoit a; & on en aura enſuite facilement l'expreſſion geometrique (n°. 2). Il en eſt ainſi des autres.

6. Les manieres dont nous venons de nous ſervir pour exprimer geometriquement les quantitez Algebriques ſont generales: on les peut ſouvent abreger par le moyen de quelques lignes menées paralleles à quelques autres lignes données de poſition, ou en décrivant quelques cercles, ſelon que l'indique la figure de chaque Problême que l'on conſtruit: mais comme ces manieres ſont particulieres, on n'en peut rien dire ici, cela dépend du genie du Geometre, qui veut réſoudre & conſtruire les Problêmes le plus élégamment qu'il lui eſt poſſible. On les trouvera pratiquées dans pluſieurs exemples.

CONSTRUCTION

Des Equations déterminées du premier degré, & de celles du ſecond qui n'ont point de ſecond terme.

7. ON voit clairement que les expreſſions geometriques des quantitez Algebriques, donnent auſſi la réſolution des équations du premier degré, & de celles du ſecond, qui n'ont point de ſecond terme; car ſi ces mêmes quantitez étoient égalées à des lettres inconnues, leur valeur ſeroit déterminée par ces expreſſions. Par exemple, pour conſtruire cette équation

$xx = aa - bc$, d'où l'on tire $x = \pm\sqrt{aa - bc}$, il n'y a qu'à exprimer $\sqrt{aa - bc}$, comme on vient de faire ; & l'expreſſion priſe de part & d'autre, de l'origine de x ſera ſa valeur poſitive, & negative. Il en eſt ainſi des autres.

CONSTRUCTION

Des Equations du ſecond degré, qui ont un ſecond terme.

VI. LEs Equations du ſecond degré qui ont un ſecond terme ſe peuvent toutes réduire à quelqu'une des quatre formules ſuivantes.

1. $xx = ax + bb$.
2. $xx = -ax + bb$.
3. $xx = ax - bb$.
4. $xx = -ax - bb$, dont les racines ſont,

1. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.
2. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.
3. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.
4. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

CONSTRUCTION

de la premiere & ſeconde Formule.

1. POUR la premiere & la ſeconde Formule. Soit dans la figure ſur laquelle on opere, & d'où l'on a tiré l'équation que l'on veut conſtruire, A le commencement de x qui va vers H. Ayant élevé au point A la ligne AB perpendiculaire à AH, & $= b$ racine du dernier quarré bb; on prendra AC (Fig. 14.) $= \frac{1}{2} a$ du côté de H, par rapport à A pour la premiere formule où il y a $+ \frac{1}{2} a$; & de l'autre côté de H (Fig. 15) pour la ſeconde formule, où il y a $- \frac{1}{2} a$; & du centre C l'on décrira par B, le cercle DBE, qui coupera AH en E, & en D. Je dis que AE ſera la valeur poſitive de x, & AD ſa valeur negative.

Fig. 14. & 15.

DE'MONSTRATION.

PUISQUE $AC = \frac{1}{2} a$, & $AB = b$; $CB = CE$ ſera $= \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$, & par conſequent $x = AE = \pm \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. *C. Q. F. D.*

On prouvera de même que AD, eſt la valeur negative de x qui doit être priſe de l'autre côté de A par rapport à H.

CONSTRUCTION

de la troiſiéme & quatriéme Formule.

1. SOIT A le commencement de x qui va vers P. Ayant pris AC du côté de P, par rapport à A pour la troiſiéme Formule, où il y a $+ \frac{1}{2} a$ (Fig. 13.); & de l'autre côté de P ſur le prolongement de AP pour la qua-

Fig. 13. & 16.

triéme formule, où il y a $-\frac{1}{2}a$ (Fig. 16); l'on décrira du centre C & du demi diametre $CA=\frac{1}{2}a$ le demi cercle AHB, on élevera enſuite CH perpendiculaire à AB, ſur laquelle ayant pris $CG=b$, racine du dernier quarré, on menera EF parallele à AB, qui coupera le demi cercle aux points E & F, d'où l'on abaiſſera les perpendiculaires FD, EI. Je dis que AD & AI, ſeront les deux valeurs poſitives de x (Fig. 13), pour la troiſiéme Formule; négatives (Fig. 16), pour la quatriéme.

DE'MONSTRATION.

PUISQUE AC ou $CF=\frac{1}{2}a$, & $CG=b$; GF, ou CD ſera $=\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, & par conſequent $AD=x=\pm\frac{1}{2}a \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, & $AI=x=\pm\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, leſquelles valeurs ſont toutes deux réelles & poſitives dans la Fig. 13. qui appartient à la troiſiéme Formule, & toutes deux réelles, mais négatives dans la Fig. 16 qui appartient à la quatriéme Formule. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

3. SI $b=CG$ eſt $=\frac{1}{2}=a=CH$, le point G tombera en H, les points D & I en C, & les deux valeurs de x, ſeront égales.

4. Si CG eſt plus grande que CH; les deux mêmes valeurs de x ſeront imaginaires, & le Problême ſera impoſſible. Ce qui ſe connoît auſſi par l'inſpection des deux Formules que l'on conſtruit.

5. On peut encore conſtruire ces équations, en faiſant évanouir le ſecond terme, aprés quoi on trouvera les valeurs de l'inconnue par l'art. 5. n°. 2.

6. Il y a encore d'autres équations qui appartiennent au ſecond degré : comme $x^4 = \pm aa\,xx \pm a^3 b$, mais on les ramene à quelqu'une des quatre Formules précedentes en égalant le quarré xx de l'inconnue à un rectangle, dont un côté eſt une autre inconnue ; & l'autre côté eſt une lettre connue de l'équation. On prend ordinairement celle qui s'y trouve le plus frequemment. Ainſi, en faiſant $ay = xx$, & mettant dans l'équation $aayy$ pour x^4, & ay pour xx, l'on aura $yy = \pm ay \pm ab$, qui étant conſtruite par les regles précedentes ; la moyenne proportionnelle entre a & y, ſera la valeur de x.

Par le moyen des équations du premier, & du ſecond degré, l'on fait tout ce que les Anciens prenoient pour Geometriques.

EXEMPLES.

VII. NOUS allons reſoudre pluſieurs Problêmes du premier & du ſecond degré, pour ſervir d'exemples à la conſtruction des équations plus compoſées que les précedentes.

PROBLÊME SIMPLE.

FIG. 17. 1. *DECRIRE un quarré* GFHI *dans un triangle donné* ABC.

Je remarque 1°. Que le triangle *ABC* étant donné, la perpendiculaire *AD* le ſera auſſi. 2°. Que pour former le quarré, il ſuffit de trouver dans la perpendiculaire *AD*, un point *E*, tel que *DE* ſoit égale à *FG* menée par le point *E* parallele à *BG* : car alors ayant mené *FH*, & *GI* paralleles à *AD* ; *FHIG* ſera un quarré.

Ayant donc ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé les données *BC*, *a* ; *AD*, *b* ; & l'inconnue *DE*, ou *FG*, *x* ; *AE* ſera $b - x$. Les triangles ſemblables *ABC*, *AFG* donneront $b\,(AD) . a\,(BC) :: b - x\,(AE) . x\,(FG)$; donc $bx = ab - ax$ ou $ax + bx = ab$, d'où l'on tire

$x = \frac{ab}{a+b}$, qui donne cette conſtruction.

On prendra ſur DB prolongée du côté de B l'intervale $DK = BC$, & $KL = AD$, & ayant joint LA, on menera KE parallele à LA, qui coupera AD au point cherché E.

DE'MONSTRATION.

A Cauſe des paralleles LA, KE l'on a IK ou (conſt.) $AD . AE :: KD$ ou (conſt.) $BC . DE$: mais $AD . AE :: BC . FG$; donc $BC . DE :: BC . FG$; & par conſequent $DE = FG$; & partant $FHIG$, eſt un quarré. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME SIMPLE.

2. *UN demi cercle*, ABC, *dont le centre eſt* D, *avec une perpendiculaire* FB *à ſon diametre* AC, *qui le diviſe en deux parties quelconques*, AF, FC, *& un autre demi cercle* FSC, *décrit ſur le diametre* FC, *étant donnez; il faut trouver dans le triligne mixte* BFSCB, *le centre* O *d'un cercle, dont la circonference touche les trois côtez du triligne mixte, comme on voit dans la Figure.* FIG. 18.

Ayant ſuppoſé le Problême reſolu, mené (art. 4. n°. 1) les lignes OI, OE paralleles à FC & à FB, & les lignes OK, OS aux points touchans K, S; qui étant prolongées, iront paſſer aux centres D, & G des cercles ABC, FSC, comme il eſt démontré dans les élemens de Geometrie.

Nommant donc les données AD, ou DC, ou DK, a; FG, ou GC, ou GS, b; DI, c; FB, f; & les inconnues FE, ou IO, ou OK, ou OS, x; FI, ou EO, y; DO ſera $a - x$; GO, $b + x$; GE, $b - x$; & DE, $c + x$. Les triangles rectangles OED, OEG donneront $DO^2 - DE^2 = EO^2$, ou en termes Algebriques $aa - 2ax + xx - cc - 2cx - xx = yy = GO^2 - GE^2 = bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx$, ou en retranchant ce qui doit être re-

tranché, $aa - cc - 2ax - 2cx = 4bx$, d'où l'on tire $x = \frac{aa-cc}{4b+2a+2c}$, où je remarque que $aa - cc = a+c \times a-c = AF \times FC = FB^2 = ff$, & que $4b+2c = AC = 2a$; & partant $x = \frac{ff}{4a}$, d'où l'on tire cette conſtruction.

Soit prolongée la perpendiculaire BF en M, en ſorte que $FM = 2\,AC = 4\,a$; du centre F par B ſoit décrit le demi cercle BQP, qui rencontrera FM en P, & BC prolongée, s'il eſt neceſſaire, en Q. Et ayant joint QM, ſoit menée par P la droite PE parallele à QM, qui rencontrera FC en E; ayant enſuite mené EO, parallele à FB, & décrit du centre D, & du demi diametre $DL = DC - FE$ le cercle LOH; il coupera EO au point cherché O, qui ſera le centre du cercle ISK, qui ſatisfait au Problême.

DE'MONSTRATION.

SOIT du centre G, & du demi diametre $G\int = GF + FE$ décrit le cercle $\int Or$. A cauſe des triangles ſemblables, MFQ, PFE; FM, ou (conſt.) $2\,AC$. FQ:: PE, ou FQ. FE; donc $2\,AC \times FE = FQ^2 = FB^2 = AF \times FC$; donc $2\,AC \times FE = AF \times FC$. Et partant $2\,AC$. AF:: FC. FE. *dividendo* $AC + FC$. AF, ou HE:: FL. FE. Encore *dividendo* $2\,FC$. HE:: EL. FE, ou Cr; donc $HE \times EL = 2\,FC \times Cr = FC \times 2\,Cr = \int E \times Er$; Et partant $HE \times EL = \int E \times Er$: mais $HE \times EL = EO^2$; donc auſſi $\int E \times Er = EO^2$; c'eſt pourquoi le point O eſt commun aux deux cercles HOL, $\int Or$, & à la perpendiculaire EO: mais par la conſtruction, les lignes OK, OI, OS ſont égales; & les points K, S, I, ſont les points touchans; puiſque les lignes OS, & KO, vont aux centres G & D des cercles ABC, FSC, & que OI, eſt perpendiculaire à FB; donc le point O, eſt le centre du cercle ISK, qui ſatisfait au Problême. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME

PROBLÊME PLAN.

3. *UN demi cercle* AEB, *dont le centre eſt* C, *& une perpendiculaire* DE *à ſon diametre étant donnez; il faut trouver ſur* DE *le point* F, *par où, & par le point* A, *ayant mené la ligne* AFG; GF *ſoit égale au demi diametre* AC. FIG. 19.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé les données AC, ou CB, ou FG, a; AD, b; DE, c; & l'inconnue AF, x; DF ſera $\sqrt{xx-bb}$; l'on a par la proprieté du cercle $DE^2 - DF^2 = AF \times FG$, ou $cc - xx + bb = ax$, ou $xx = -ax + cc + bb$; d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + cc + bb}$, qui fournit cette conſtruction.

Soient menées du point E aux extremitez A & B du diametre AB, les droites EA, EB. Et ayant fait $EL = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$, ſoit décrit du centre A par L, l'arc LH qui coupera AB en H. Et du centre H, & du demi diametre EL, ſoit décrit un cercle qui coupera AB aux points I & K. Je dis que AI, ſera la valeur poſitive de x; c'eſt pourquoi ſi du centre A l'on décrit les deux arcs KG, IF qui couperont la circonference AEB en G, & DE en F; la droite AF étant prolongée rencontrera la circonference AEB en G, & FG ſera par conſequent $= AC$; puiſqu'elle eſt égale à IK double de $EL = \frac{1}{2}AC$.

DE'MONSTRATION.

PAR la conſtruction, & à cauſe des triangles rectangles AEL, ADE; $AL^2 - EL^2 = AH^2 - IH^2 = AK \times AI = AG \times AF = AE^2 = AD^2 + DE^2 = AB \times AD = AD \times DB + AD^2$; donc $AG \times AF$, ou $AF \times FG + AF^2$, ou $AF \times FG + AD^2 + DE^2$

$= AD \times DB + AD^2$; donc, en retranchant AD^2 de part & d'autre, $AF \times FG + DF^2 = AD \times DB = DE^2$; donc $AF \times FG = DE^2 - DF^2$; d'où il ſuit que la ligne AF prolongée, rencontre le demi cercle AEB au point G où l'arc KG le coupe. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME PLAN.

FIG. 20. 4. *UN demi cercle* BEC *dont le centre eſt* D, *& un point* A *hors du demi cercle, étant donnez de poſition ſur un Plan; il faut trouver le point* E, *ou* F *ſur ſa circonference, par où, & par le point* A, *ayant mené la ligne* AFE, *ſa partie* FE, *ſoit égale au demi diametre* BD.

Ayant ſuppoſé le Problême reſolu, & nommé les données AC, a ; AB, b ; BD, ou FE, c ; AE ſera $x + c$; la proprieté du cercle donnera $a\,(AC) . x + c\,(AE) :: x\,(AF) . b\,(AB)$; donc $xx + cx = ab$, ou $xx = -cx + ab$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$ qui donne cette conſtruction.

Ayant mené du point A la tangente AI, & du point touchant I le rayon ID, l'on prendra $IK = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}c$; du centre A par K, l'on décrira l'arc KL qui coupera AC en L ; & du centre L, & du rayon IK, l'on décrira un cercle qui coupera AC en O & M. Enfin du centre A par les points O & M, l'on décrira les arcs OF, ME, qui couperont le cercle BEC aux points F, E ; de ſorte que la ligne AF prolongée, ira au point E ; & FE ſera par conſequent $= BD$; puiſqu'elle eſt égale à $OM = 2\,IK = BD$.

DE'MONSTRATION.

A Cauſe du triangle AIK, rectangle en I ; $AK^2 -$

$IK^2 = AL^2 - OL^2 = AM \times AO = AE \times AF = AI^2$: mais $AC \times AB = AI^2$; donc $AE \times AF = AC \times AB$; d'où il ſuit que le point E eſt commun au cercle BEC, à l'arc ME, & à la droite AFE. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME PLAN.

5. *UN triangle* ABC, *& un point* D *hors du triangle étant donnez, il faut mener du point* D *une ligne* DEF, *en ſorte que le triangle* ABC, *ſoit au triangle* EBF, *en la raiſon donnée de* m *à* n. FIG. 21.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu; puiſque le point D eſt donné de poſition, les lignes DG parallele à AB, & GB qui eſt le prolongement du côté BC, ſeront (art. 4. n° 5) auſſi données; nommant donc les données AB, a; BC, b; DG, g; GB, f; & les inconnues EB (art. 4 n° 8) x; & BF, y; GF ſera $f + y$, & l'on aura par les qualitez du Problême $AB \times BC . EB \times BF :: m . n$: car il eſt facile de démontrer que $AB \times BC . EB \times BF :: ABC . EBF$; donc en termes analytiques, $ab . xy :: m . n$; donc $nab = mxy$. Et les triangles ſemblables DGF, EBF donnent, $g . (DG) . f + y (GF) :: x (EB) . y (BF)$; donc $gy = fx + xy$; & faiſant évanouir y, l'on aura $mfxx = -nabx + nabg$, ou $xx = -\frac{nabx + nabg}{mf}$. Pour reduire cette équation à la ſeconde Formule de l'article 6, & pour la conſtruire, ſoit fait $m . n :: a (AB) . \frac{na}{m}$ qui ſoit BI que je nomme c; mettant donc c dans l'équation en la place de $\frac{na}{m}$, elle ſe changera en celle-ci $xx = -\frac{cbx + cbg}{f}$. Ayant mené CL parallele à AB, IK parallele à BC, & GIL qui rencontrera CL en L; l'on aura, à cauſe des triangles ſemblables GBI, IKL, $GB (f) . BI (c) :: IK (b) . KL = \frac{bc}{f}$ qui étant nommée d, & mettant d en la

place de $\frac{bc}{f}$ dans la derniere équation, elle deviendra celle-ci $xx = -dx + dg$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + dg}$, qui montre que pour avoir la valeur de $x = BE$, il faut diviſer DG en H; en ſorte que $DH . HG :: HG . KL$; & mener HE parallele à GB qui coupera AB au point cherché E; de ſorte que la ligne DEF menée de D par E, réſout le Problême.

DE'MONSTRATION.

PAR la conſtruction $DH . HG$, ou $EB :: EB . KL$, & les triangles ſemblables DHE, EBF donnent $DH . EB :: HE$, ou $GB . BF$; donc $EB . KL :: GB . BF$; & par tant $EB \times BF = GB \times KL$: mais les triangles ſemblables GBI, IKL, donnent $GB . BI :: IK$, ou $BC . KL$; donc $BI \times BC = GB \times KL$; donc $EB \times BF = BI, \times BC$. Mais $AB \times BC . EB \times BF$, ou $IB \times BC :: AB . IB ::$ (conſt.) $m . n$, comme le triangle ABC, au triangle EBF. C. Q. F. D.

FIG. 22. 6. Si l'on veut que le point donné D, ſoit dans le triangle, il n'y a qu'à changer le ſigne où f ſe rencontre; parcequ'alors GB, deviendra négative de poſitive qu'elle étoit, c'eſt-à-dire, que le point G tombera entre B & C; & l'on aura $xx = -\frac{nabx + nabe}{-mf}$ ou $xx = \frac{nabx - nabg}{mf}$ qui ſervira à conſtruire le Problême en cette ſorte.

Soit diviſée AB en I, en ſorte que $AB . BI :: m . n$. Et ayant pris ſur GD, $GO = BI$, on menera par les points B, & O la droite indéfinie BOL, & par C la ligne CL parallele à AB, qui rencontrera BOL en L. Soit enſuite prolongée GD en H; en ſorte que $DH . HG :: HG . CL$, & menée HE parallele à BC, qui coupera AB en E. Je dis que la ligne EDF menée par les points E & D, réſout le Problême.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt la même que la précedente.

REMARQUE I.

7. L'EQUATION précedente $xx = \frac{nabx - nabg}{mf}$, étant réduite à celle-ci $xx = dx - dg$, comme l'on a fait celle du cas précedent (n°. 5), fait voir que ſi la moyenne proportionnelle entre $DG\,(g)$, & $CL\,(d)$ ſurpaſſe $\frac{1}{2}CL$, le Problême ſera impoſſible: car alors les deux valeurs de x ſeront imaginaires.

REMARQUE II.

8. SI dans les deux conſtructions précedentes, le point F étoit tombé au-de-là du point C, hors du triangle; il auroit fallu mener la parallele DG de l'autre côté du point G, qui auroit rencontré le côté AC, prolongé du côté de A dans le premier cas, & l'on ſe ſeroit ſervi du côté AC, comme l'on a fait du côté BC. FIG. 21. 22.

REMARQUE. III.

9. CE ſeroit encore la même choſe, ſi le point D étoit donné ſur un des côtez BC prolongé: car DG parallele à AB, rencontreroit le côté AC prolongé du côté de A, & l'on trouveroit comme on vient de faire, le point E; par où ayant mené la droite DEF, l'on auroit le triangle AEF, qui ſeroit au triangle ABC, comme n à m. FIG. 23.

REMARQUE IV.

10. SI le point D étoit au ſommet de l'un des angles comme en A; il n'y auroit qu'à diviſer BC en F; enſorte que $BC \,.\, BF :: m \,.\, n$, & mener AF: car en ce cas $ABC \,.\, ABF :: m \,.\, n$. FIG. 24.

REMARQUE V.

FIG. 25. 11. SI le point *D* étoit ſur un des côtez *AB* ; en nommant *AB*, *a* ; *BC*, *b* ; *DB*, *g* ; qui ſont les données, & l'inconnue *BF*, *x* ; l'on auroit, ſelon l'hypotheſe, *ab* : *gx* :: *m* . *n* ; & partant $mgx = nab$; donc $x = \frac{nab}{mg}$: qui fournit cette conſtruction.

On diviſera *BC* en *H*, en ſorte que *BC* . *BH* :: *m* . *n* ; & ayant pris *BF* quatriéme proportionnelle à *DB*, *AB*, *BH*, l'on menera la ligne *DF* qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené *AH*, les triangles *ABH*, *DBF* ſeront égaux ; puiſque (conſt.) *DB* . *AB* :: *BH* . *BF* : mais le triangle *ABC* eſt au triangle *ABH* :: *BC* . *BH* :: *m* . *n* ; donc *ABC* . *DBF* :: *m* . *n* . C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

12. ON peut par le moyen de ce Problême, & des remarques qu'on y a faites, réſoudre toutes les queſtions de la Geodeſie.

FIG. 26. Soit par exemple, un rectiligne quelconque *ABCEGH*, & un point *D* hors de ce rectiligne, donnez de poſition ; il faut mener la ligne *DOF*, qui diviſe le même rectiligne, de maniere que la partie *OHGEF*, ſoit à la partie *OABCF*, comme *m* à *n*.

On menera du point *D* aux angles du rectiligne des droites *DG*, *DE*, *DC*, *DB*. Or puiſque l'on connoit la ſuperficie du rectiligne entier, & qu'on peut connoitre celle de toutes les parties qui le compoſent ; on connoitra auſſi ſi quelqu'une des lignes *DB*, *DC*, *DE*, *DG*, ſatisfait au Problême. Mais ſi aucune n'y ſatisfait, de ſorte que la partie *LHGE* ſoit trop petite, & la partie *KHGEC* trop grande ; il eſt neceſſaire, ſelon cette hypotheſe, que la ligne *DOF* paſſe entre les lignes *DC*, *DE*, afin que la

Figure ſoit diviſée dans la raiſon demandée : mais parceque l'on connoit le rapport de toute la Figure à ſes parties *KABC*, *LABCE*, l'on connoitra auſſi le rapport du quadrilatere *LKCE* à ſa partie *OKCF* ; c'eſt pourquoi, 1°. Si les lignes *KL*, *CE* ſont paralleles, il n'y a qu'à diviſer *CE* en *F*, en ſorte que *CE* ſoit à *CF* dans la raiſon convenable, & mener *DOF*, qui ſatisfera à la queſtion : car *CE . KL :: CF . KO*, ou *DCE . DKL :: DCF . DKO* ; & *dividendo LKCE . DCE :: OKCF . DCF . permutando LKCE . OKCF :: DCE . DCF :: CE . CF.*

2°. Si les lignes *CE*, *KL* ne ſont point paralleles, elles concourront de part ou d'autre en un point *P*, que l'on trouvera en cette ſorte. Ayant mené *LR* & *LQ* paralleles à *KC*, & à *CF*, ces droites ſeront données de grandeur auſſi bien que *KQ*. Soit donc fait à cauſe des triangles ſemblables *KQL*, *KCP* ; *KQ . QL :: KC . CP* ; *CP* ſera donc auſſi donnée de grandeur ; c'eſt pourquoi tirant *KS* perpendiculaire à *CE*, qui ſera auſſi donnée ; l'on aura la ſuperficie du triangle *KCP* ; & par conſequent (no. 9), le rapport de tout le triangle à ſa partie *OKCF*, & le Problême ſera réſolu. FIG. 27.

PROBLÊME PLAN.

13. DE'CRIRE *un triangle* ABC *rectangle en* A, *dont le plus petit côté* AB, *& la difference* DC *des ſegmens de l'hypothenuſe, faits par la perpendiculaire* AE, *ſoient données de grandeur.* FIG. 28.

Ayant ſuppoſé le Problême reſolu, l'on décrira du centre *A*, & du rayon *AB*, le cercle *GBF*, qui paſſera par le point *D* ; puiſque *DC*, eſt la difference des ſegmens *BE*, *EC* de l'hypothenuſe *BC* ; & ayant prolongé *AC* en *G* ; *GC* ſera $= AB + AC$; & $FC = AC - AB$. Nommant donc les données *AB*, *a* ; *DC*, *b* ; & l'inconnue *CF*, *x* ; *AC* ſera $a + x$; & *GC*, $2a + x$; & l'on aura à cauſe du cercle *CD* (*b*) . *CF* (*x*) :: *CG*

$(2a+x).CB=\frac{2ax+xx}{b}$; donc à cauſe de l'angle droit ABC. $BC^2=AB^2+AC^2$, ou en termes Algebriques $\frac{4aaxx+4ax^3+x^4}{bb}=2aa+2ax+xx$, ou en ordonnant l'équation, $x^4+4ax^3+4aaxx-2abbx-2aabb=0$, qui eſt une $-bbxx$ équation du quatriéme degré ; & qui ne peut être diviſée par aucun binome compoſé de l'inconnue, & d'un des diviſeurs du dernier terme : mais avant que de conclure quelle eſt la nature du Problême, il faut faire évanouir le ſecond terme. Faiſant donc $x+a=z$, l'on a $x=z-a$; & mettant cette valeur de x dans l'équation en la place de x, & les puiſſances de cette valeur en la place des puiſſances ſemblables de x, l'on aura cette nouvelle équation $z^4-2aazz+a^4=0$; & com- $-bbzz$ $-aabb$ me le quatriéme terme eſt auſſi évanoui, il ſuit que le Problême eſt plan : car faiſant $ay=zz$, l'équation ſe changera en celle-ci, $aayy-2a^3y+a^4=0$, ou $yy=$ $-abby-aabb$ $\frac{2aay+bby+abb-a^3}{a}$, que l'on peut ramener à une des 4 formules précedentes ; trouver par conſequent la valeur de y, & chercher enſuite une moyenne proportionnelle entre y & a, qui ſera la valeur de z, d'où ayant ôté a, on aura celle de x qu'il falloit trouver. Mais ces ſortes de conſtructions ſont tres-compoſées ; c'eſt pourquoi dans de pareils cas, il faut tâcher, en prenant d'autres voyes, de trouver une équation du ſecond degré, qui donneroit une conſtruction beaucoup plus ſimple, plus élegante, & plus naturelle. Prenons donc BD pour l'inconnue ; & l'ayant nommée x ; BC ſera $b+x$; BE, $\frac{1}{2}x$; & EC, $\frac{1}{2}x+b$; & l'on aura à cauſe de l'angle droit BAC, $BE\times EC=\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}bx=AE^2$: & à cauſe du triangle rectangle

gle AEB, l'on aura $BE^2 + AE^2 = \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}bx = aa = AB^2$, qui ſe réduit à $xx = -bx + 2aa$; d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + 2aa}$, qui donne cette conſtruction.

D, étant le commencement de x qui va vers B, on prendra ſur CD, prolongée de part & d'autre, $DG = 2a = 2AB$, & $DH = a = AB$, & ayant décrit ſur le diametre GH, le demi cercle GRH, on élevera au point D la perpendiculaire DR, qui rencontrera la circonference en R. Et du centre O, milieu de DC, on décrira par R, le demi cercle BRK qui coupera DG au point cherché B. De ſorte que DB ſera la valeur poſitive de x, & DK ſa valeur négative; c'eſt pourquoi ayant décrit ſur l'hypotenuſe BC, le triangle rectangle BAC, dont le petit côté AB ſoit $= a$, le Problême ſera réſolu. FIG. 29

DE'MONSTRATION.

PAR la conſtruction $AB = a$, & $DC = b$; il ne reſte donc qu'à prouver que la perpendiculaire AE qui tombe de l'angle droit A ſur l'hypothenuſe BC, diviſe BD par le milieu en E.

La proprieté du cercle donne $BD \times DK = DR^2 = GD \times DH$; donc $BD . GD$ ou $2 DH :: DH . DK$, ou en prenant la moitié des conſequens, $BD . DH$ ou $AB :: AB . \frac{1}{2} DK$; donc $BD \times \frac{1}{2} DK$, ou $\frac{1}{2} BD \times DK = AB^2$; donc DK, ou $CB . AB :: AB . \frac{1}{2} BD$: Mais les triangles ſemblables CBA, ABE donnent $CB . AB :: AB . BE$; donc $AB . \frac{1}{2} BD :: AB . BE$; donc $\frac{1}{2} BD = BE$. C. Q. F. D.

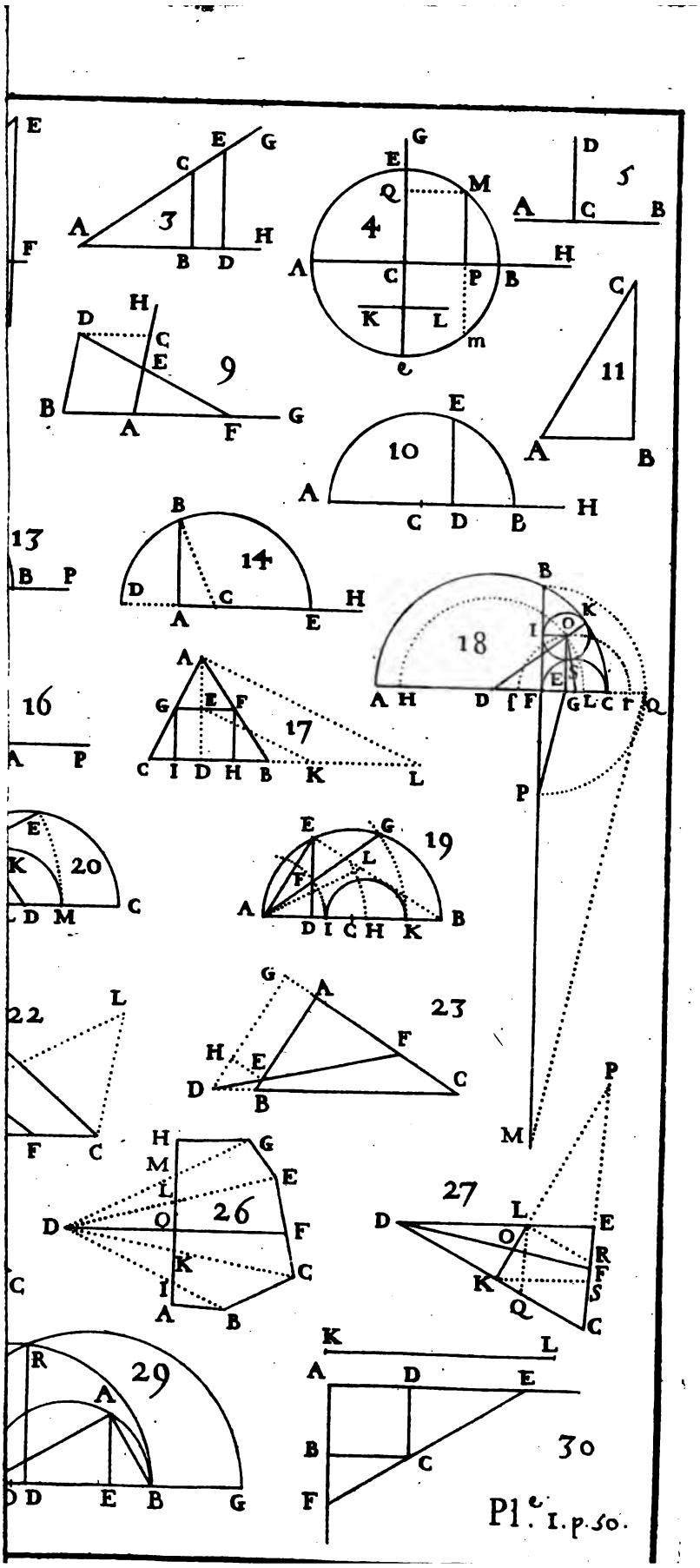
PROBLÊME PLAN.

FIG. 30. 14. *UN quarré* ABCD *dont les côtez* AB, AD *ſont prolongez étant donné ; il faut trouver ſur l'un des prolongemens* AE, *le point* E, *en ſorte que la ligne menée par* E, *& par l'angle* C, *terminée par l'autre prolongement* BF, *ſoit égale à une autre ligne donnée* KL, *qui ne ſoit point moindre que le double de la diagonale du quarré.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé AD, ou AB, a ; KL, b ; & les inconnues AE, x ; AF, y ; DE ſera, $x - a$; le triangle rectangle FAE donnera $AE^2 + AF^2 = xx + yy = bb = (hyp.)\ EF^2$, qui eſt une équation au cercle. Et les triangles ſemblables FAE, CDE ; donneront $y\ .\ (FA.)\ x\ (AE) :: a\ (CD)\ .\ x - a\ (DE)$; donc $xy - ay = ax$, qui eſt une équation à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptes ; & ayant fait évanouir y, & ordonné l'équation, on aura $A\ .\ x^4 - 2ax^3 + 2aaxx + 2abbx - aabb = 0$, qui eſt $- bbxx$ une équation du quatriéme degré, & qui ne peut être diviſée par aucun binome ; c'eſt pourquoi pour déterminer quelle eſt la nature du Problême, il faut, ſuivant les principes de Mr Deſcartes, & ce que nous avons dit art. 4. nº. 18, faire évanouir le ſecond terme. Soit pour ce ſujet $x - \frac{1}{2}a = z$; donc $x = z + \frac{1}{2}a$; $xx = zz + az + \frac{1}{4}aa$; $x^3 = z^3 + \frac{3}{2}azz + \frac{3}{4}aaz + \frac{1}{8}a^3$; $x^4 = z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}aazz + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4$, & mettant ces valeurs de x, de xx, de x^3, & de x^4 dans l'équation A, elle deviendra celle-ci.

$$B.\ z^4 + \tfrac{1}{2}aazz + a^3z + \tfrac{5}{16}a^4 - bbzz + abbz - \tfrac{1}{4}aabb = 0.$$

où il n'y a point de ſecond terme.


3
4
5
9
10
11
13
14
16
17
18
19
20
22
23
26
27
29
30
Pl.e I. p. 50.

Pour transformer preſentement l'équation *B* en une équation du troiſiéme degré, on ſe ſervira de cesdeux équations:

C. $zz - yz - f = 0$.

D. $zz + yz + t = 0$, que je multiplie l'une par l'autre, pour avoir celle-ci:

E. $z^4 - fzz - fyz - tf = 0$. qui eſt ſemblable à
$- yyzz - tyz$
$+ tzz$.

l'équation *B*. Mais pour abreger le calcul, j'égale les quantitez connues de chaque terme de l'équation *B* à de ſimples lettres connues; à ſçavoir,

$\frac{1}{2} aa - bb = p$,

$a^3 + abb = q$.

$\frac{5}{16} a^4 - \frac{1}{4} aabb = r$. De ſorte que l'équation *B* devient celle-ci.

F. $z^4 + pzz + qz + r = 0$.

Je compare préſentement les deux équations *E* & *F*, terme à terme, chacun à ſon correſpondant; ce qui me donne les trois équations ſuivantes: car les deux premiers termes ne donnent rien.

G. $t - yy - f = p$.

H. $- ty - fy = q$.

I. $- tf = r$.

L'équation *I* donne $f = \frac{-r}{t}$; & mettant en la place de f, cette valeur dans les deux équations *G* & *H*, & multipliant enſuite par t, l'on a les deux ſuivantes.

K. $tt - tyy + r = pt$.

L. $- tty + ry = qt$.

L'équation *K* donne $tt = tyy + pt - r$, & mettant cette valeur de tt dans l'équation *L*, l'on a $- ty^3 - pty + 2ry = qt$, d'où l'on tire *M*. $t = \frac{2ry}{y^3 + py + q}$; & mettant cette valeur de t dans les équations *H* & *I*, l'on

aura les deux qui ſuivent, $N.\ \frac{-2ryy}{y^3+py+q} - fy = q$; & $O.\ \frac{-2fry}{y^3+py+q} = r$; d'où faiſant évanouir l'inconnue f, ôtant les fractions, & retranchant ce qui doit être retranché, l'on aura $P.\ y^6 + 2py^4 + ppyy - qq - 4ryy = 0$, qui eſt l'équation transformée, & qui ſe rapporte au troiſiéme degré; & remettant à preſent dans l'équation P, en la place de p, q, & r leurs valeurs, l'on aura,

$$Q.\ y^6 + aay^4 + b^4yy - a^6 - 2bby^4 - 2a^4bb - aab^4 = 0$$

Si l'on tente preſentement toutes les diviſions de cette équation par les binomes qu'on peut former par le quarré de l'inconnue y, c'eſt-à-dire, par yy; (car il n'eſt point ici neceſſaire de les tenter par aucun autre); & par quelqu'un des diviſeurs Plans du dernier terme, l'on trouvera qu'elle ſe peut diviſer par celui-ci.

$R.\ yy - aa - bb = 0$; & le quotient ſera,

$S.\ y^4 + 2aayy + a^4 - bbyy + aabb = 0.$

qui eſt une équation du ſecond degré; & qui par conſequent fait connoitre que le Problême eſt Plan.

Si on veut le réſoudre ſans chercher une autre équation du ſecond degré: Voici la méthode qu'on doit ſuivre.

L'on a déja l'équation $O.\ \frac{-2fry}{y^3+py+q} = r$, d'où l'on tire $T.\ f = -\frac{y^3-py-q}{2y}$. Il ne s'agit plus que de chercher une valeur ſemblable de t; ce qui ſe fait en cette ſorte. L'équation I donne $t = \frac{-r}{f}$; mettant donc cette valeur de t dans les deux équations G & H, l'on aura $-r - fyy - ff = pf$, & $ry - ffy = qf$: & faiſant évanouir le quarré ff, l'on aura $-r - fyy - \frac{ry+qf}{y}$

$= pf$, d'où l'on tire $f = \frac{-2ry}{y^3 + py - q}$; & cette valeur de f, ſubſtituée dans l'équation I, donne aprés avoir ôté les fractions, & ce qu'il y a à ôter, $V \cdot t = \frac{y^3 + py - q}{2y}$.

Si l'on met preſentement dans les deux équations C, & D, en la place de f, & de t leurs valeurs priſes dans les deux équations T, & V, l'on aura les deux ſuivantes.

$zz - yz + \frac{y^3 + py + q}{2y} = 0$, &

$zz + yz + \frac{y^3 + py - q}{2y} = 0$, ou

$X.\ zz - yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$, &

$Y.\ zz + yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$

Mais l'équation R, donne $yy = aa + bb$, & $y = \sqrt{aa + bb}$; l'on a auſſi $p = \frac{1}{2}aa - bb$, & $q = a^3 + abb$; ſubſtituant donc dans les deux équations X, & Y en la place de y, de yy, de p, & de q, leurs valeurs; l'on aura aprés les réductions ordinaires,

$zz - z\sqrt{aa + bb} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb} = 0$, &

$zz + z\sqrt{aa + bb} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb} = 0$, ou

$zz = z\sqrt{aa + bb} - \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}$, &

$zz = -z\sqrt{aa + bb} - \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}$, dont les racines ſont;

$z = \frac{1}{2}\sqrt{aa + bb} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}}$, &

$z = -\frac{1}{2}\sqrt{aa + bb} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}}$. Mais pour ôter le ſecond terme de l'équation A, l'on a fait

$z = x - \frac{1}{2}a$; c'eſt pourquoi en mettant dans les deux dernieres équations, en la place de z, ſa valeur $x - \frac{1}{2}a$; l'on aura les deux qui ſuivent,

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+bb}}.$$

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+bb}},$$

dont la conſtruction réſout le Problême.

Il faut demeurer d'accord que cette méthode de Mr Deſcartes, de reconnoitre la nature d'un Problême dont l'équation eſt du quatriéme degré, & de tirer de cette équation du quatriéme degré, deux équations du ſecond, quand le Problême eſt Plan, eſt parfaitement belle, & digne de ſon genie ; c'eſt pourquoi j'ai jugé à propos de là mettre ici tout au long ; parceque je ne l'ai vûe nulle part entierement expliquée. Il eſt neanmoins à propos, comme on a déja remarqué, aprés avoir reconnu qu'un Problême dont l'équation eſt du quatriéme degré eſt Plan, de chercher par d'autres voyes une équation du ſecond degré ; parceque la conſtruction du Problême en devient plus ſimple, comme on va voir par cet exemple.

FIG. 31. 15. Les mêmes choſes que dans l'énoncé du Problême, étant ſuppoſées, on prolongera BC vers G, l'on menera EG perpendiculaire à FE, qui rencontrera CG en G, & l'on abaiſſera du point E ſur CG la perpendiculaire EH : ce qui formera les triangles ſemblables CBF, CEG, CHE, & EHG : & outre cela les triangles CBF, EHG égaux, puiſque $BC = EH$; c'eſt pourquoi ayant nommé les données AB ou AD, a ; KL ou FE, b ; & les inconnues CG, x ; CE, y ; BG ſera, $a + x$; & FC ou EG $b - y$; les triangles ſemblables CBF, CEG, donneront $a\,(CB) . b - y\,(CF) :: y\,(CE) . x\,(CG)$; donc $ax = by - yy$; & le triangle rectangle CEG donnera $CG^2 = xx = bb - 2by + 2yy = CE^2 + EG^2$, ou

$\frac{bb-xx}{2} = by - yy = ax$, ou $bb - xx = 2ax$, d'où l'on tire $x = -a \pm \sqrt{aa+bb}$, qui donne cette conſtruction.

Soit prolongée CD en I, en ſorte que $CI = KL$; décrit du centre B par I, le cercle IG, qui coupera BC prolongée en G; & ſur le diametre CG, le demi cercle CEG, qui coupera AD prolongée E & e, ou la touchera en un ſeul point E, ſi le Problême eſt poſſible, c'eſt-à-dire, ſi KL ſurpaſſe ou égale le double de la diagonale du quarré AC. Je dis que la ligne FE, ou $ef = KL$; & que par conſequent le Problême eſt réſolu.

DE'MONSTRATION.

A Cauſe des triangles ſemblables CBF, CEG. CB. $CF :: CE$. CG; donc $CB \times CG = CF \times CE$. Et à cauſe du cercle IG dont le centre eſt B; $CI^2 = BG^2 - BC^2 = 2BC \times CG + CG^2 = 2CF \times CE + CE^2 + EG^2$ ou $CF^2 = FE^2$; donc $CI^2 = FE^2$; donc $CI = FE = KL$. C. Q. F. D.

On démontrera de même que $ef = KL$.

PROBLÊME PLAN.

16. LA *ſomme* AB *des deux côtez* AE, EI *d'un triangle* AEI, *l'angle* AEI *que doivent former les deux côtez* AE, EI; *& la perpendiculaire* EG *menée de cet angle ſur la baſe* AI, *étant donnez, décrire le triangle* AEI. FIG. 32.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, ſoit prolongée AE en B, en ſorte que $EB = EI$, & menée par A la ligne AD parallele à EI, & égale à AB; la ligne menée par les points B & I, rencontrera AD en D: car $BE = EI$, & $BA = AD$. Soit faite AK perpendiculaire à BD, qui ſera diviſée par le milieu en K, puiſque le triangle BAD eſt iſoſcele. Ayant enfin mené BH perpendiculaire à AI prolongée, & nommé les données KB, ou KD, c; la perpendiculaire EG, b; AK, d; & les inconnues AI,

z ; KI, x ; BH, u ; BI ſera $c-x$, & ID, $c+x$.

Les triangles ſemblables IAK, IBH donneront z (IA). d (AK) :: $c-x$ (IB). u (BH) ; donc $u=\frac{cd-dx}{z}$. Et les triangles ſemblables HBA, GEA, & BEI, BAD donnent, u (HB). b (GE) :: BA. EA :: $2c$ (BD) $c+x$ (ID). d'où l'on tire $u=\frac{2bc}{c+x}$; donc $\frac{2bc}{c+x}=\frac{cd-dx}{z}$, ou $2bcz=ccd-dxx$: mais le triangle rectangle AKI, donne $xx=zz-dd$; c'eſt pourquoi en mettant cette valeur de xx, dans l'équation précedente, l'on en tire $zz=-\frac{2bcz}{d}+cc+dd$: Mais en nommant AB, a ; l'on a, à cauſe du triangle rectangle AKB, $aa=cc+dd$; mettant donc dans l'équation en la place de $cc+dd$ ſa valeur aa, l'on a celle-ci $zz=-\frac{2bcz}{d}+aa$, d'où l'on tire $z=-\frac{bc}{d}+\sqrt{\frac{bbcc}{dd}+aa}$, qui fournit cette conſtruction.

Soit priſe $AF=GE$, & menée FL parallele à KB ; ſoit prolongée KA en C, en ſorte que $AC=FL$; & ayant mené AM parallele à KB, & égale à AB, l'on décrira du centre C par M, le cercle MN, qui coupera AK prolongée en N ; & du centre A par N, l'on décrira le cercle NIO qui coupera KB, en I ; & ayant joint AI, l'on menera IE parallele à DA, qui formera le triangle AIE, qu'il falloit décrire.

DE'MONSTRATION.

Il eſt clair que $AE+EI=AB$, que l'angle AEI, eſt tel qu'on le ſouhaite, & que $AN=AI$. A cauſe de FL (conſt.) parallele à KB ; l'on a AK (d). KB (c) :: AF, ou GE (b). $FL=\frac{bc}{d}=$ (conſt.) AC, & par-

tant

tant $CN \frac{be}{d} + z$; & par la propriété du cercle, $CN^2 - CA^2 = AM^2 = AB^2$; ce qui eſt en termes Algebriques $\frac{2bcz}{d} + zz = aa$, ou $zz = -\frac{2bcz}{d} + aa$ qui eſt l'équation que l'on a conſtruite; d'où il ſuit que la conſtruction précedente réſout le Problême. *C. Q. F. D.*

J'ai copié ce Problême dans le Traité des lieux Geometriques de Mr de la Hire, parcequ'il ouvre le chemin à la réſolution de pluſieurs Problêmes ſemblables, comme eſt celui qui ſuit: j'y ai ajouté la conſtruction, & la démonſtration que cet Auteur n'avoit pas donnée.

PROBLÊME PLAN.

17. *DE'CRIRE un triangle* AEI, *dont on connoit la ſomme des côtez* AE + EI = AB, *la baſe* AI, *& dont l'angle* AEI, *ſoit égal à un angle donné.* FIG. 32.

En ſuppoſant la préparation précedente, & nommant les données AK, d; AI, b; & l'inconnue KI, x; l'on aura par la propriété du triangle rectangle AKI, $xx = bb - dd$; donc $x = \sqrt{bb - dd}$, qui donne cette conſtruction.

Soit du centre A & du rayon AI, décrit le cercle OIN qui coupera KB au point cherché I; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

PROBLÊME PLAN.

18. *UN rectangle* ABCD *étant donné, il faut décrire un autre rectangle* EHGF; *dont les côtez ſoient également éloignez de ceux du rectangle* ABCD, *& que le rectangle* ABCD, *ſoit au petit* EHGF *dans la raiſon donnée de* m *à* n. FIG. 33.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé les don-

nées AD, ou BC, a; AB, ou DC, b; & l'inconnue AL, ou LE, x; EF ſera, $a-2x$, & EH, $b-2x$.

L'on aura par les qualitez du Problême, $ab.ab-2ax-2bx+4xx::m.n$. donc $mab-2max-2mbx+4mxx=nab$, d'où l'on tire $xx=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}bx+\frac{nab-mab}{4m}$. Ce qui fournit cette conſtruction.

Soit priſe $AI=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & décrit ſur le diametre AI, le demi cercle API. Et ayant élevé au centre K, la perpendiculaire KP, pris $KO=\sqrt{\frac{nab-mab}{4m}}$ & mené par O la ligne QOR, qui rencontrera le demi cercle aux points Q & R, par où l'on menera QL & RM paralleles à PK, qui couperont AI aux points cherchez L & M. De ſorte qu'ayant pris AS, BT, & BV égales à AL, l'on formera le rectangle $EHGF$, & le Problême ſera réſolu.

DE'MONSTRATION.

PAR la proprieté du cercle $AL\times LI=LQ^2$ ou en termes Algebriques $x\times\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-x=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}bx-xx=\frac{mab-nab}{4m}$, ou $xx=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}bx+\frac{nab-mab}{4m}$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

J'ai démontré la conſtruction de ces deux derniers Problêmes algebriquement, pour indiquer la maniere de démontrer tous les autres de même; ce qui eſt ſi facile, que je ne crois pas qu'il ſoit neceſſaire d'apporter un plus grand nombre d'exemples.

Les Démonſtrations, faites à la maniere des anciens, éclairent plus l'eſprit que les Démonſtrations Algebriques, quoiqu'elles ne ſoient pas plus certaines: mais auſſi

elles ne ſont pas ſi faciles à trouver, comme il eſt aiſé de juger par les Démonſtrations des Problêmes précedens, que l'on auroit pû démontrer par l'Algebre auſſi facilement que les deux derniers.

SECTION III.

Où l'on donne la Méthode de démontrer les les Theorêmes de Geometrie.

METHODE.

VIII. APRE'S avoir mené les lignes que l'on juge neceſſaires, en ſuivant les Obſervations de l'article 4, on nommera celles qui doivent entrer dans la queſtion, comme lorſqu'on veut réſoudre un Problême, avec cette difference, que l'on peut ſe ſervir de toutes les lettres indifferemment : car comme l'on ne cherche la grandeur d'aucune ligne, on les peut regarder comme étant toutes connues, ou inconnues.

Cela fait, on exprimera en termes Algebriques, les veritez que l'on veut démontrer, & on cherchera des équations par les proprietez du triangle rectangle, & des triangles ſemblables, ou autrement, que l'on ramenera par le moyen des ſubſtitutions aux mêmes expreſſions, que celles qui expriment les veritez dont il s'agit, & alors le Theorême ſera démontré.

S'il arrive que tous les termes de l'équation ſur laquelle on opere, ſe détruiſent, de ſorte qu'il reſte o = o, le Theorême ſera encore démontré : car c'eſt une marque que la choſe eſt telle qu'on l'a ſuppoſée, ſans qu'il ſoit neceſſaire de déterminer la grandeur d'aucune des lignes qui ont été nommées. Ceci arrive ordinairement lorſque l'on regarde les Theorêmes qu'on veut démontrer, comme des Problêmes qu'on veut réſoudre.

Il arrive auſſi quelquefois que l'on croit réſoudre un Problême, & il ſe trouve par la mutuelle deſtruction

des termes de l'équation, que c'eſt un Theorême, qui ſe trouve auſſi par ce moyen démontré. Tout ceci ſera éclairci par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

Theorême.

1. *SI une ligne droite donnée* AB, *eſt coupée également en* C, *& inégalement en* D; *le quarré de la moitié* CB *moins le quarré de la partie du milieu* CD, *ſera égal au rectangle des deux parties inégales* AD, DB. FIG. 34.

Ayant nommé *AC*, ou *CB*, *a*; *CD*, *b*; *AD* ſera, *a + b*; & *DB*, *a — b*.

Il faut démontrer que $aa - bb\ (CB^2 - CD^2) = AD \times DB$.

DEMONSTRATION.

EN multipliant $a + b$ (*AD*) par $a - b$, (*DB*) l'on aura $aa - bb\ (CB^2 - CD^2) = AD \times DB$. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE II.

Theorême.

2. *SI une ligne droite* AB, *coupée par le milieu en* C, *eſt prolongée en* D *d'une grandeur quelconque. Je dis que le quarré de* CD *moins le quarré de* CB, *ſera égal au rectangle de la toute* AD, *par la partie prolongée* BD. FIG. 35.

Ayant nommé *CD*, *a*; *AC*, ou *CB*, *b*; *AD* ſera, *a + b*; & *BD*, *a — b*.

Il faut démontrer que $aa - bb\ (CD^2 - CB^2) = AD \times DB$.

DE'MONSTRATION.

SI l'on multiplie $a+b$ (AD) par $a-b$ (DB, l'on aura $aa-bb$ (CD^2-CB^2) $=AD\times DB$. C. Q. F. D.

On démontrera de même les autres propoſitions du ſecond Livre d'Euclide, où il s'agit des proprietez des lignes diviſées de differentes manieres.

EXEMPLE III.

Theorême.

FIG. 36. 3. DANS *tout triangle obtuſangle* ABC, *dont l'angle* ABC *eſt obtus, ſi l'on prolonge un des côtez* BC *du côté de* B, *& que l'on abaiſſe du point* A *ſur le prolongement, la perpendiculaire* AD; *le quarré du côté* AC *oppoſé à l'angle obtus, ſera égal à la ſomme des quarrez des deux autres côtez* AB, BC, *& outre cela à deux rectangles dont* BC *eſt un côté, & le prolongement* BD, *l'autre.*

Ayant nommé AC, a; AB, b; BC, c; DB, d; AD, g; DC ſera $c+d$.

Il faut prouver que aa (AC^2) $=bb+cc+2cd$ ($AB^2+BC^2+2BC\times BD$).

DE'MONSTRATION.

A Cauſe du triangle rectangle ABC; aa (AC^2) $=gg$ (AD^2) $+dd+2cd+cc$ (DC^2): Mais le triangle rectangle ADB donne $bb=gg+dd$; mettant donc en la place de $gg+dd$ ſa valeur bb; l'on aura $aa=bb+2cd+cc$. C. Q. F. D.

FIG. 37. Si l'on fait DB ($=d$) $=0$, le point D tombera en B, & l'angle ABC ſera droit; & l'on aura $aa=bb+cc$: car $2cd$ devient nulle à cauſe de $d=0$: mais ſi l'on fait d negative, & moindre que $c=BC$; le point D tombera entre B, & C; & partant les deux angles ABC, & C ſeront aigus, & l'on aura en changeant le ſigne du

terme où d ſe rencontre, $aa = bb - 2cd + cc$, ou $aa + 2cd = bb + cc$, ou $AC^2 + 2BC \times BD = AB^2 + BC^2$; c'eſt-à-dire que dans tout triangle, le quarré du côté oppoſé à un angle aigu, avec deux fois le rectange du côté ſur lequel tombe la perpendiculaire, par la partie interceptée entre la perpendiculaire, & cet angle aigu eſt égal à la ſomme des quarrez des deux autres côtez.

EXEMPLE IV.

Theorême.

4. *SI dans un cercle* ABGD, *dont le centre eſt* C, *l'on mene librement deux droites* BE, DF *qui ſe coupent en* O. *Je dis que* BO × OE = DO × OF. FIG. 38.

L'on menera par le point O, le diametre $ACOG$, les rayons CB, CD, & les perpendiculaires CI ſur BE, & CK ſur DF; & ayant nommé les rayons CA, CG, CB, CD, a; BI, ou IE, b; DK, ou KF, c, OI; d; OK, f; CI, g; CK, h; CO k; BO ſera, $b + d$; OE, $b - d$; DO, $c + f$; & OF, $c - f$. Il faut démontrer que $bb - dd$ ($BO \times OE$) $= cc - ff$ ($DO \times OE$).

DE'MONSTRATION.

LES triangles rectangles CIB, CKD, CIO, CKO, donnent 1°. $aa = bb + gg$, 2°. $aa = cc + hh$, 3° $kk = dd + gg$, 4°. $kk = ff + hh$; & faiſant évanouir aa dans les deux premieres équations, kk dans la troiſiéme & quatriéme, l'on aura 5°. $bb + gg = cc + hh$, 6°. $dd + gg = ff + hh$; & ſouſtrayant les deux membres de la ſixiéme équation des deux membres de la cinquiéme, le premier du premier, & le ſecond du ſecond, il viendra $bb - dd = cc - ff$. C. Q. F. D.

EXEMPLE V.

Theorême proposé en forme de Problême.

FIG. 39. 5. *UN cercle* AEBF, *dont le centre est* C, *& un diametre* AB *étant donnez; il faut trouver au dedans du cercle le point* D, *d'où ayant abaissé la perpendiculaire* DI *sur le diametre* AB, *& par où ayant mené une droite quelconque* EDF; ED × DF + DI² *soit* = AI × IB.

Ayant mené par *D* la droite *GDH* parallele à *AB*; puisque $GD \times DH = ED \times DF$, on peut mettre $GD \times DH$ en la place de $ED \times DF$; de sorte que le Problême se réduit à trouver le point *D*; en sorte que $GD \times DH + DI^2 = AI \times IB$.

Ayant supposé le Problême résolu, mené *CK* parallele à *ID*, le rayon *CH*, & nommé les données *CH*, *AC*, ou *CB*, *a*; & les inconnues *CI*, ou *KD*, *x*; *CK*, ou *ID*, *y*; *AI* sera $a - x$; *IB*, $a + x$; *KH*, $\sqrt{aa - yy}$; *DH*, $\sqrt{aa - yy} + x$; *DG*, $\sqrt{aa - yy} - x$, & les conditions du Problême donneront $aa - yy - xx$ (*GD* × *DH*) + *yy* (*DI*²) = $aa - xx$ (*AI* × *IB*) qui se reduit à o = o. C'est pourquoi le Problême proposé est un Theorême, & comme il ne reste aucune ligne pour déterminer la position du point *D*; il suit que l'on peut prendre ce point par tout où l'on voudra dans le cercle.

L'on auroit pu démontrer ce Theorême comme le précedent, & l'on pourroit aussi démontrer tous les Theorêmes, comme on a fait celui-ci, en les considerant comme des Problêmes.

EXEMPLE

EXEMPLE VI.

Theorême.

6. LES *parallelogrammes* BD, CE, *& les triangles* ABC, DCF *qui ont même hauteur* AG, *ſont entr'eux comme leurs baſes* BC, CF. FIG. 40.

Ayant nommé BC, a; CF, b; & la hauteur AG, c; l'on aura ac = au parallelogramme BD que je nomme, x, & bc = au parallelogramme CE, que je nomme y; il faut démontrer que $x(BD).y.(CE) :: a.b$.

DE'MONSTRATION.

PUISQUE $x = ac$, & $y = bc$, l'on a $x.y :: ac.bc$; donc $bcx = acy$, ou $bx = ay$; donc $x.y :: a.b$. *C. Q. F. D.*

C'eſt la même choſe pour les triangles.

EXEMPLE VII.

Theorême.

7. LES *triangles ſemblables* ABC, DEF *ſont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez homologues* AB, DE. FIG. 41.

Ayant nommé AB, a; BC, b; DE, c; EF, d; le triangle ABC, x; & le triangle DEF, y; les produits ab ($AB \times BC$), & cd ($DE \times BF$) ſeront en même raiſon que les triangles ABC, & DEF, ou x, & y; c'eſt pourquoi l'on aura $ab.cd :: x.y$; donc $cdx = aby$: mais la reſſemblance de ces triangles donne $a.(AB)\ b :: (BC)\ c\ (DE)\ d\ (.EF)$; donc $ad = bc$; donc $d = \frac{bc}{a}$; & mettant cette valeur de d dans la premiere équation, l'on aura $\frac{bccx}{a} = aby$, ou $ccx = aay$; donc $x.y :: aa.cc :: AB^2.DE^2$. *C. Q. F. D.*

L'on démontrera de même, que tous les polygones ſemblables ſont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez homologues. Et comme les cercles ſont auſſi des

polygones ſemblables d'une infinité de côtez, dont les diametres ſont les côtez homologues ; il ſuit que les cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres, ce que l'on démontre auſſi facilement que pour les triangles ſemblables.

EXEMPLE VIII.

Theorême.

8. *LES ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtez homologues.*

FIG. 42, 43. Soient deux Spheres AB, & CD ; ayant nommé le diametre AB de la Sphere AB, a ; ſa circonference, c ; le diametre CD de la Sphere CD, b ; ſa circonference, d ; la Sphere AB, x ; & la Sphere CD, y. Il faut démontrer que $x . y :: a^3 . b^3$.

DEMONSTRATION.

LA Sphere AB eſt égale à $\frac{aac}{6}$, & la Sphere $CD = \frac{bbd}{6}$; donc $x . y :: \frac{aac}{6} . \frac{bbd}{6} :: aac . bbd$; donc $bbdx = aacy$: Mais les cercles étant des polygones ſemblables, leurs diametres ſont comme leurs circonferences ; c'eſt pourquoi $a . b :: c . d$; donc $ad = bc$; & partant $d = \frac{bc}{a}$; mettant donc cette valeur de d dans la premiere équation, l'on a $\frac{b^2cx}{a} = aacy$, ou $b^2 x = a^2 y$; donc $x . y :: a^3 . b^3$. *C. Q. F. D.*

On démontrera la même choſe, & de la même maniere pour les autres ſolides ſemblables.

EXEMPLE IX.

Theorême.

FIG. 44. 9. *LES triangles* ABC, DEF *dont les baſes* BC, EF, *& les hauteurs* AG, DH *ſont en raiſon reciproque, ſont égaux.*

Ayant nommé BC, a; EF, b; AG, c; DH, d; le triangle ABC, x; & le triangle DEF, y; l'on aura le triangle $ABC = \frac{ac}{2} = x$, & le triangle $DEF = \frac{bd}{2} = y$; donc $x . y :: \frac{ac}{2} . \frac{bd}{2} :: ac . bd$; donc $bdx = acy$: Mais (*hyp*) $a . b :: d . c$; donc $ac = bd$; c'eſt pourquoi la premiere équation $bdx = acy$ devient $x = y$, $ABC = DEF$. *C. Q. F. D.*

On démontrera de la même maniere que les parallelipedes, les priſmes, les cilindres, les cones, & les piramides dont les baſes, & les hauteurs ſont en raiſon reciproque, ſont en raiſon d'égalité.

On ne donnera pas davantage d'exemples de la Méthode de démontrer par l'Algebre les Theorêmes de Geometrie: car les quatre Sections ſuivantes, où l'on démontrera les proprietez les plus conſiderables des Sections coniques, en fourniront un aſſez grand nombre.

SECTION IV.

Des Sections du Cone & du Cilindre.

DEFINITIONS GENERALES.

FIG. 45, 46, 47. IX. 1. ON appelle *Section Conique*, une ligne courbe *IDH*, qui eſt la commune Section d'un Plan *EDF*, & de la ſuperficie d'un Cone *ABC*, dont *A* eſt le ſommet; & la baſe eſt un cercle dont le diametre eſt *BC*.

2. Le triangle *ABC* eſt appellé le *triangle par l'axe*; parcequ'il eſt la commune Section du Cone, & d'un Plan qui paſſe par le ſommet *A*, & par le diametre *BC* de la baſe, & que l'axe du Cone, eſt dans le Plan du même triangle *ABC*.

SUPPOSITION.

3. ON ſuppoſe que le Plan *EDF*, eſt perpendiculaire au Plan du triangle *ABC*, & que le Plan du triangle *ABC*, eſt perpendiculaire à la baſe du Cone.

COROLLAIRE.

4. D'où il ſuit que *DG*, qui eſt la commune Section du Plan *EDF*, & du triangle *ABC*; eſt perpendiculaire à *EGF*, qui eſt la commune Section du même Plan *EDF*, & de la baſe du Cone; & que la même *EGF*, eſt perpendiculaire à *BC*; & par conſequent coupée (Fig. 45, & 47) par le milieu en *G*; d'où l'on conclura auſſi que ſi l'on mene par quelque point *L* de la ligne *DG*, une ligne *MN* parallele à *BC*, & une autre ligne *IH* parallele à *EF*; ces deux lignes *MN*, & *IH*, ſeront dans un plan parallele à la baſe du Cone, dont la commune Section avec la ſuperficie du Cone, ſera un cercle qui paſſera par les points *M*, *I*, *N*, *H*, & dont le diametre ſera

MN, qui coupera à angles droits, & par le milieu en *L*, la ligne *IH*.

Il ſuit auſſi que le point *D*, qui eſt commun à la courbe *IDH*, & au côté *AB* du triangle *ABC*, eſt plus prés du ſommet *A* dans les ſuppoſitions précedentes, que tout autre point de la même Courbe.

DE'FINITIONS PARTICULIERES.

5. LA Section Conique *IDH*, eſt nommée *parabole*, lorſque le Plan coupant *EDF*, eſt parallele à un des côtez *AC* du Cone ou du triangle *ABC*; *DG* eſt nommée *l'axe* de la parabole; *D*, ſon *ſommet*; *DL*, l'*abciſſe*, ou la *coupée*; *IL*, ou *LH*, l'*appliquée*, ou l'*ordonnée* à l'axe. FIG. 45.

6. La Section Conique *IDH*, eſt appellée, *ellipſe*, lorſque le Plan coupant *EDF*, coupe les deux côtez *AB*, *AC* du Cone ou du triangle par l'axe, & n'eſt point parallele à la baſe du Cone. La ligne *Dd* eſt nommée l'*axe*, ou *diametre principal*; le point *K* milieu de *Dd*, le *centre*; la ligne *VKR* menée par le centre *K* perpendiculaire à *Dd*, l'*axe*, ou le *diametre conjugué* à l'axe *Dd*; *DL*, l'*abciſſe* ou la *coupée*; *LI*, ou *LH*, l'*ordonnée*, ou l'*appliquée* à l'axe *Dd*. FIG. 46.

Il peut arriver un cas où la Section eſt un cercle, quoique le Plan coupant ne ſoit point parallele à la baſe du Cone: mais cela ne fait rien à notre deſſein.

7. La Section Conique *IDH*, eſt appellée *hyperbole*, lorſque le Plan coupant *EDF*, coupe auſſi la ſuperficie Conique oppoſée, & y forme une autre hyperbole *edf*, oppoſée à la premiere, que l'on démontrera ailleurs lui être égale, & ſemblable; *Dd* eſt nommée l'*axe* déterminé de l'hyperbole, ou des hyperboles oppoſées; *D*, & *d*, le *ſommet* de l'axe *Dd*; *DL*, l'*abciſſe*, ou la *coupée*; *LI*, ou *LH*, l'*appliquée*; ou l'*ordonnée*; le point *K* milieu de *Dd*, le *centre*. FIG. 47.

PROPOSITION. I.

Theorême.

FIG. 45. 8. *EN ſuppoſant les mêmes choſes que l'on a ſuppoſées dans la Figure où la courbe* IDH, *eſt une parabole; & outre cela, ſi on mene* DO *parallele à* BC, *ou à* MN; *ſi on prend* AP = DO, *& qu'on mene* PQ *parallele à* DO, *ou à* MN. *Je dis que* DL × PQ = LI² = LH².

Puiſque le Plan coupant *EDF* eſt (n°. 5.) parallele à *AC*; *AP* = *DO* ſera = *LN*; & ayant nommé les données *AO*, *b*; *DO*, ou *AP*, ou *LN*, *c*; *PQ*, *p*; & les inconnues *DL*, *x*; & *LI*, *y*.

Il faut prouver que $px(PQ \times DL) = yy(LI^2)$.

DE'MONSTRATION.

LES triangles ſemblables *AOD*, *DLM*, donnent *AO* (*b*) . *OD* (*c*) :: *DL* (*x*) . *LM* = $\frac{cx}{b}$; Or (n°. 4), & par la proprieté du cercle (*LM* × *LN*) $\frac{ccx}{b}$ = (*LI*²) = *yy*: mais la reſſemblance des triangles *AOD*, *APQ* donne *b* . (*AO*) . *c* (*OD*) :: *c* (*AP*) . *p* (*PQ*); donc *cc* = *bp*. Mettant donc *bp* en la place de *cc* dans la premiere équation, l'on aura *px* = *yy*, *C. Q. F. D.*

DE'FINITION.

9. LA ligne *PQ* = *p*, eſt appellée le *parametre* de l'axe de la parabole.

PROPOSITION II.

Theorême.

10. *EN ſuppoſant les mêmes choſes que dans la Figure où la courbe* IDH *eſt une ellipſe ; & outre cela, ſi l'on diviſe* Dd *par le milieu en* K, *& ſi l'on mene* SKT *parallele à* MN, *&* VKR *parallele à* HI ; RV, *ſera la commune Section de l'ellipſe, & d'un cercle* SRTV, *dont le diametre eſt* ST, *& qui eſt coupé dans la ſuperficie Conique par un Plan parallele à la baſe du Cone, ou au Plan du cercle* MINH, *puiſque* HI *eſt (n°. 4) la commune Section de l'ellipſe, & du cercle* MINH. *De ſorte que* V *&* R *ſeront dans la circonference du cercle* SRTV, *& dans celle de l'ellipſe. Cela poſé, je dis que* DL × Ld . LI² :: DK² . KR². FIG. 46.

Ayant nommé les données DK, ou Kd, a ; SK, g ; KT, f ; KV, ou KR, b ; & les indéterminées KL, x ; LI, ou LH, y ; DL ſera $a-x$, & dL, $a+x$.

Il faut démontrer que $aa-xx\ (DL\times Ld) . yy\ (LI^2) :: aa\ (DK^2) . bb\ (KR^2)$.

DE'MONSTRATION.

LES triangles ſemblables dKT, dLN, & KDS, LDM, donnent $dK\ (a) . KT\ (f) :: dL\ (a+x) . LN = \frac{af+fx}{a}$, & $KD.(a) . KS\ (g) :: LD\ (a-x)\ LM = \frac{ag-gx}{a}$; donc par la proprieté du cercle $\frac{aafg-afgx+afgx-fgxx}{aa}$ $(LN\times LM) = yy\ (LI^2)$, qui ſe reduit à $\frac{aafg-fgxx}{aa} = yy$: mais $fg = TK \times KS =$ (par la proprieté du cercle) $KR^2 = bb$; c'eſt pourquoi mettant dans l'équation précedente pour fg ſa valeur bb, l'on aura $\frac{aabb-bbxx}{aa} = yy$, ou $aa-xx = \frac{aayy}{bb}$, d'où l'on tire $aa-xx . yy :: aa . bb$, C. Q. F. D.

Si l'on avoit nommé DL, x; l'on auroit trouvé cette équation $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$

PROPOSITION III.

Theorême.

FIG. 47. II. *EN ſuppoſant les mêmes choſes que l'on a ſuppoſées dans la Figure où la courbe* IDH *eſt une hyperbole, & outre cela, ſi l'on diviſe* Dd *par le milieu en* K, *& qu'ayant mené* KTS *parallele à* MN, *on trouve une moyenne proportionnelle* KR *entre* KS, *&* KT. *Je dis que* DL × Ld . LI² :: DK² KR².

Ayant nommé les données KD, a; KR, b; KS, g; KT, f; & les indéterminées KL, x; LI, ou IH, y; LD ſera, $x - a$; & Ld, $x + a$.

DE'MONSTRATION.

LES triangles ſemblables dKT, dLN, & DKS, DLM, donnent, $dK\,(a)\,.\,KT\,(f) :: dL\,(x+a)\,.\,LN = \frac{fx+af}{a}$, & $DK\,(a)\,.\,KS\,(g) :: DL)\,x-a\,(\,.\,LM = \frac{gx-ag}{a}$; donc par la proprieté du cercle $\frac{gfxx-aafg}{aa}$ $(ML \times LN) = yy$ (LI^2). L'on a auſſi par la conſtruction $g\,(KS)\,.\,b\,(KR)$ :: $b\,.\,(KR)\,.\,f\,(KT)$; donc $gf = bb$; c'eſt pourquoi ſi l'on met dans l'équation précedente, en la place de gf ſa valeur bb, l'on aura $\frac{bbxx-aabb}{aa} = yy$, ou $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, d'où l'on tire $xx - aa\,.\,yy :: aa\,.\,bb$. C. Q. F. D.

Si l'on avoit nommé DL, x; l'on auroit eu cette équation $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$,

DE'FINITION.

DE'FINITION.

12. LA ligne *VKR* double de *KR* menée par *K* parallele à *IH*, eſt appellée l'*axe conjugué* à l'axe *Dd*. FIG. 46, 47.

13. Dans l'ellipſe & dans l'hyperbole, la troiſiéme proportionnelle à deux diametres conjuguez quelconques, eſt appellée le *parametre* de celui qui occupe le premier lieu dans la proportion.

14. Suivant cette Définition, il eſt aiſé de déterminer le parametre de l'axe *Dd* dans l'ellipſe, & dans l'hyperbole : car il n'y a qu'à prendre $DP = 2KT$; & la droite *PQ*, parallele à *MN*, qui rencontre le côté *AB* du cone en *Q*, ſera le parametre qu'on cherche : car, ayant nommé la ligne *PQ*, *p* ; les triangles ſemblables *DKS*, *DPQ*, donnent $a\ (DK) . g\ (KS) :: 2f\ (DP$, ou $2KT) . p\ (PQ)$; donc $pa = 2fg$: mais (n°. 11) $fg = bb$; donc $pa = 2bb$, d'où l'on tire $a . b :: 2b . p$, ou $2a . 2b :: 2b . p$, c'eſt à-dire $Dd . RV :: RV . PQ$.

15. Puiſque (n°. 14) $a . b :: 2b . p :: b . \frac{1}{2}p$; donc $aa . bb :: a . \frac{1}{2}p :: 2a . p$; donc $aap = 2abb$; donc $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$; c'eſt pourquoi, ſi l'on met dans les deux équations précedentes (n°. 10, & 11) au lieu de $\frac{aa}{bb}$ ſa valeur $\frac{2a}{p}$; l'on aura $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$, & $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$; d'où l'on tire $aa - xx$, ou $xx - aa . yy :: 2a . p$, c'eſt-à-dire, $DL \times LD . LI^2 :: Dd . PQ$.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 48. 13. *LA même hyperbole* IDH, *dont l'axe déterminé est* Dd, *le centre* K, *le diametre ou l'axe conjugué* RV *perpendiculaire à* Dd, *une ordonnée* IL *parallele à* RV, *étant mise sur un Plan. Je dis qu'ayant fait au ſommet* D, DB, *& égales à* KR, *ou* KV; *les lignes* KB, KE *menées du centre* K *par les points* B, E, *& indéfiniment prolongées, ne rencontreront jamais l'hyperbole, & qu'elles s'en approcheront de plus en plus à l'infini.*

DÉMONSTRATION.

AYANT mené du ſommet D, les droites DG, DO paralleles à KB, & à KE; du point I, les droites IM, IP paralleles aux mêmes KE, KB, & prolongé IL de part & d'autre qui rencontre KB & KE en C, & F; & nommé, comme dans la propoſition précedente, les données DK, a; DB, ou DE, b; KO, ou GD, ou KG, ou OD, qui ſont toutes égales, c; & les indeterminées KL, x; LI, ou LH, y; IP ou MK, $ſ$; IM, ou PK z.

Les triangles ſemblables KDB, KLC, donnent $KD(a)$. $DB(b) :: KL(x)$. $LC = \frac{bx}{a}$; donc $IC = \frac{bx}{a} - y$ & $IF = \frac{bx}{a} + y$: car puiſque (conſt.) $DB = DE$, LC ſera $= LF$; & puiſque (n°. 4) $LI = LH$, IC, ſera $= HF$. De plus, les triangles ſemblables DBG, ICM, & DEO, IFP donnent, $b.(DB).c(DG) :: \frac{bx}{a} - y(IC).z(IM)$, & $b(DE).c(DO) :: \frac{bx}{a} + y(IF).ſ(IP)$, d'où l'on tire ces deux équations $bz = \frac{bcx}{a} - cy$, & $bſ = \frac{bcx}{a} + cy$: mais l'on a par la Propoſition précedente xx

$-aa = \frac{aayy}{bb}$; c'eſt pourquoi ſi on fait évanouir x, & y, par le moyen de ces trois équations, l'on aura celle-ci $fz = cc$, c'eſt-à-dire, $PI \times IM = KG \times GD$, qui fait voir que f, ou PI, ou MK croiſſant, z ou MI diminue ; ce qui peut aller à l'infini. Et comme fz, ou $PI \times IM$, doit toujours être $= KG \times GD$; Il ſuit que quelque grande que l'on ſuppoſe f, ou PI, ou KM, il faut que MI ait encore quelque longueur ; & partant KM ne rencontrera jamais l'hyperbole IDH. C. Q. F. D.

DE'FINITION.

LES lignes KC, & KF ſont nommees *aſymptotes* de l'hyperbole.

COROLLAIRE.

IL eſt clair que tous les parallelogrammes, comme $KIMP$, ſont égaux entr'eux, & au parallelogramme $KGDO$, en quelqu'endroit de l'hyperbole que l'on prenne le point I.

PROPOSITION V.
Theorême.

14. SOIT AB *une ſuperficie cilindrique coupée par un Plan* AB *qui paſſe par l'axe du cilindre. Je dis que ſi l'on coupe la ſuperficie cilindrique par un autre Plan* dIDHd *perpendiculaire au Plan* AB, *& incliné à l'axe du cilindre, la commune Section* dIDHd *de ce Plan, & de la ſuperficie cilindrique, ſera une ellipſe.* FIG. 49.

DE'MONSTRATION.

AYANT diviſé Dd qui eſt la commune Section des Plans AB, & $dIDHd$ par milieu en K, & pris librement un point L ſur la même Dd ; ſi l'on ſuppoſe la ſuperficie cylindrique coupée par deux Plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe du cilindre, qui paſſent par les points K & L, les communes Sections $SVTR$, $MHNI$

de ces deux Plans, avec la ſuperficie cilindrique, ſeront deux cercles dont les communes Sections VKR, HLI, avec le Plan $dIDHd$, ſeront perpendiculaires à Dd, à ST, & à MN; & dont les communes Sections ST, MN, avec le Plan AB, ſont les diametres; d'où il ſuit que $KV = KR$, & $LH = LI$, & que le point K qui diviſe Dd par le milieu, diviſe de même ST; & partant le point K eſt le centre du cercle SVT.

Ayant donc nommé les données KD, ou Kd, a; SK, ou KT, ou KR, ou KV, b; & les indéterminées KL, x; LI, y; DL ſera $a+x$, & Ld $a-x$.

Les triangles ſemblables DKS, DLM donnent DK (a). $KS(b) :: DL(a+x)$. $LM = \frac{ab+bx}{a}$. Pareillement les triangles ſemblables dKT, dLN donnent $dK(a)$. $KT(b) :: dL(a-x)$. $LN = \frac{ab-bx}{a}$. Mais à cauſe du cercle MIN, $ML \times LN = LI^2$, c'eſt-à-dire en termes Algebriques $\frac{aabb-bbxx}{aa} = yy$, ou $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$; & comme cette équation eſt la même que la précedente (n°. 10). Il ſuit que la courbe $dIDHd$, eſt une ellipſe. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION VI.

Theorême.

18. *SI les baſes des ſuperficies coniques ; & par conſequent les courbes* IMH, *qui ſont les communes Sections des mêmes ſuperficies coniques par des Plans paralleles aux baſes, ont cette proprieté qu'une puiſſance quelconque de leurs appliquées* LH, *ou* LI, *ſoit égale au produit de deux puiſſances de* LM, & LN, *telles que la ſomme de leurs expoſans, ſoit = à l'expoſant de la puiſſance de* LI, *c'eſt-à-dire par exemple, que* $LI^{p+q} = LM^{p} \times LN^{q}$, ou $LM^{q} \times LN^{p}$. *Je dis que les Sections coniques* IDH, *telles que nous les avons définies (n°. 5, 6, & 7) ſont de même genre que les courbes* IMH. FIG. 45, 46, 47.

En donnant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a données (n°. 8, 10, & 11); & faiſant $p+q = m$. p & q, ſignifient tels nombres qu'on voudra entiers ou rompus.

Soit premierement le Plan coupant *EDF* parallele à *AC*. Il faut prouver que la courbe *IDH*, eſt une parabole du même genre que la courbe *IMH*.

DE'MONSTRATION.

L'ON trouvera, comme on a fait (n°. 8) $LM = \frac{cx}{b}$; donc $LM^{p} = \frac{c^{p}x^{p}}{b^{p}}$. $LN = DO$ a été nommée c; donc $LN^{q} = c^{q}$: mais par la proprieté de la courbe *IMH*, $LM^{p} \times LN^{q} = LI^{m}$, c'eſt-à-dire, en termes Algebriques, $\frac{c^{q}c^{p}x^{p}}{b^{p}} = y^{m}$, qui eſt une équation à une parabole du même genre que la courbe *IMH*, puiſque l'inconnue y, dont l'expoſant eſt plus grand que celui de x, eſt élevée à la même puiſſance que $LI = y$, dans l'équation à la courbe *IMH*. *C. Q. F. D.*

Ce ſera la même Démonſtration pour l'ellipſe & pour

l'hyperbole, & pour la Section du cilindre.

Mr De la Hire pui eſt le ſeul que je ſçache qui a parlé de ces courbes, les appelle celles du ſecond, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme genre, *&c.*

Si dans l'équation précedente $LI^m = LM^p \times LN^q$, on fait $p = 2$, & $q = 1$, ou $p = 1$, & $q = 2$; $m = p+q$ ſera $= 3$, & l'équation deviendra $LI^3 = LM^2 \times LN$, ou $LI^3 = LM \times LN^2$, & la courbe IMH, ſera un cercle du ſecond genre.

Dans la même ſuppoſition de $p = 2$, & $q = 1$, l'équation $\frac{c^q c^p x^p}{b^p} = y^m$, devient $\frac{c^3 xx}{bb} = y^3$, qui eſt du même degré que celle de la courbe IMH, & qui appartient par conſequent à une parabole du ſecond genre, qu'on appelle *ſeconde parabole cubique.*

Si $p = 1$, & $q = 2$, l'équation $\frac{c^q c^p x^p}{b^p} = y^m$ deviendra $\frac{c^3 x}{b} = y^3$, qui ſe rapporte encore à une parabole du ſecond genre, qu'on appelle *premiere parabole cubique.* Il en eſt ainſi des autres.

REMARQUE.

16. ON détermineroit avec la même facilité la nature, & le genre de la courbe IDH, dans le Cone, & dans le Cilindre; ſi la courbe IMH, dont le Plan eſt parallele à la baſe BC, étoit une Section conique d'un genre quelconque. Et en general, la nature de la courbe IMH étant donnée, on déterminera aiſément la nature de la courbe IDH; & au contraire. De ſorte qu'il n'y a point de courbe que l'on ne puiſſe conſiderer comme la Section d'une eſpece de Cone ou de Cilindre, & déterminer par ſon moyen la nature de la courbe IMH parallele à la baſe de ce Cone, & de ce Cilindre; ou bien qu'il n'y a point de courbe, que l'on ne puiſſe ſuppoſer être la baſe d'uu Cone, ou d'un Cilindre, &

déterminer par ſon moyen la nature des Sections de ce Cone, & de ce Cilindre. De maniere qu'on peut avoir des Sections coniques d'une infinité de genres, & de pluſieurs eſpeces dans chaque genre. Or comme les genres les plus compoſez renferment un plus grand nombre de courbes que les plus ſimples, il y aura d'autant plus d'eſpeces de Sections coniques dans chaque genre, qu'il ſera plus compoſé.

On s'eſt contenté de démontrer dans le Cone, la principale proprieté des Sections coniques du premier genre, attendu qu'on en va démontrer dans les trois Sections ſuivantes, toutes les proprietez neceſſaires pour l'Application de l'Algebre à la Geometrie, en les décrivant par des points trouvez ſur des Plans. On ne les a même conſiderées dans le Cone que parcequ'elles y ont pris leur origine & leur nom; & pour faire voir que celles qu'on décrit ſur des Plans, ſont préciſément les mêmes que celles qu'on coupe dans le Cone, & qu'on peut par conſequent leur donner les mêmes noms.

SECTION V.

Où l'on démontre les principales proprietez de la parabole, décrite par des points trouvez ſur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 50. X. *UNE ligne droite* DFP, *& deux points fixes* D, *&* F *ſur cette ligne, étant donnez de poſition ſur un Plan. Je dis que ſi l'on mene librement la ligne* MPm, *perpendiculaire à* DFP; *& ſi du centre* F, *& du rayon* DP, *l'on décrit un cercle; il coupera la perpendiculaire* MPm, *en deux points* M *&* m, *qui ſeront à la parabole.*

DE'MONSTRATION.

IL eſt clair qu'ayant diviſé *DF* par le milieu en *A*, le cercle décrit du centre *F*, & du rayon *DA*, touchera en *A*, la perpendiculaire menée par le point *A*, & ne rencontrera point celles qui ſeroient menées au-deſſus de *A* par rapport à *F*: mais qu'il coupera en deux points toutes celles qui ſeront menées au-deſſous de *A*, comme *MPm*; d'où il ſuit que la courbe qui paſſe par les points *M*, *m* trouvez, comme on vient de dire, paſſe auſſi par le point *A*.

Ayant mené *FM*, & nommé les données, ou conſtantes *AF*, ou *AD*, *a*; & les indéterminées, ou variables *AP*, *x*; *PM*, *y*; *FP* ſera $x-a$, ou $a-x$; & *FM*, ou *DP*, $x+a$.

Le triangle rectangle *FPM* donne $xx-2ax+aa+yy=aa+2ax+xx$, qui ſe réduit à $4ax=yy$, ou (en faiſant

ſant $4a = p$) $px = yy$. Or comme cette équation eſt la même que celle de l'article 9. n°. 8 ; il ſuit que la courbe MAm, eſt une parabole, dont le parametre eſt $p = 4a = 4AF = 2FD$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

1. IL eſt évident que $2FD . PM :: PM . AP$: car l'équation $4ax = yy$, étant réduite en analogie, donne $4a . y :: y . x$.

COROLLAIRE II.

2. IL eſt clair que ſi l'on mene par D la ligne ED parallele à PM, & par les points M, m qui ſont communs à la parabole & à la perpendiculaire MPm, les droites ME, me paralleles à PD, elles ſeront égales entr'elles, à PD, & à FM, & que les parties PM, Pm de la perpendiculaire MPm, ſeront auſſi égales.

DE'FINITIONS.

3. LA ligne AP eſt nommée l'*axe* de la parabole ; A, le *ſommet* de l'axe, ou de la parabole ; PM, ou Pm l'*appliquée*, ou l'*ordonnée* ; AP, l'*abciſſe* ou la *coupée* ; F, le *foyer* ; D, le *point generateur* ; Ee, la *ligne generatrice* ; AB, quadruple de AF, ou de AD, le *parametre* de l'axe.

COROLLAIRE III.

4. L'ON voit par l'équation précedente $4ax = yy$ que x croiſſant y croît auſſi ; & qu'ainſi la parabole s'éloigne toujours de plus en plus de ſon axe à meſure que le point P s'éloigne du ſommet A, & que cela peut aller à l'infini : car il n'y a rien dans l'équation qui empêche d'augmenter x à l'infini.

COROLLAIRE IV.

5. D'OÙ il ſuit que les lignes comme EM menées paralleles à AP paſſent au dedans de la parabole étant prolongées vers R, & ne la rencontre qu'en un ſeul point M.

COROLLAIRE V.

6. SI dans l'équation $4ax = yy$, l'on fait $x = a$, le point P tombera en F, & l'on aura $4aa = yy$; donc $2a = y$; c'eſt-à-dire que l'appliquée FO qui part du foyer eſt égale à la moitié du parametre; & ſi l'on fait $x = 4a$, l'on aura $16aa = yy$, ou $4a = y$, c'eſt-à-dire que AP, & PM ſeront chacune égale au parametre.

COROLLAIRE. VI.

7. IL eſt manifeſte que la quantité conſtante qui accompagne l'inconnue ou l'indéterminée qui n'a qu'une dimenſion dans un des membres de l'équation, eſt l'expreſſion du parametre de l'axe de la parabole, lorſque le quarré de l'autre indéterminée eſt ſeul dans l'autre membre : par exemple dans cette équation $\frac{aax}{c} = yy$, $\frac{aa}{c}$, eſt l'expreſſion du parametre de l'axe de la parabole dont l'abciſſe eſt x; & l'appliquée y.

PROPOSITION II.

Theorême.

8. LES *quarrez des ordonnées* PM, QN *ſont entr'eux comme les abciſſes correſpondantes* AP, AQ.

Ayant nommé comme dans la Propoſition précedente $AB, 4a$; AP, x; PM, y; & $AQ, ſ$; $QN\ z$.

Il faut prouver que $PM^2 (yy). QN^2 (zz) :: AP (x) : AQ (ſ)$.

D'EMONSTRATION.

L'ON a par la Propoſition précedente $4ax = yy$, & $4aſ = zz$; donc $yy . zz :: 4ax . 4aſ :: x . ſ$. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

Theorême.

9. LES *mêmes choſes étant toujours ſuppoſées. Je dis que, ſi d'un point quelconque* m *pris ſur la parabole, on mene* me *parallele à* PA, *qui rencontrera la generatrice en* e, *& par le ſommet* A, *la droite* AC *parallele à* De *qui rencontrera* em *en* C; *le cercle* mIe *décrit ſur le diametre* me *coupera* AC *par le milieu en* I.

Ayant nommé la donnée *AD*, ou *eC*, *a*; & les indéterminées *AP*, ou *Cm*, *x*; *Pm*, ou *AC*, *y*; & *CI*, *ſ*.

Il faut prouver que $CI\,(ſ) = \frac{1}{2}\,AC\left(\frac{1}{2}\,y\right)$.

DE'MONSTRATION.

L'ON a par la premiere propoſition $4ax = yy$, & par la proprieté du cercle $ax\,(eC \times Cm) = ſſ\,(CI^2)$, ou $4ax = 4ſſ$; donc $y = 2ſ$, ou $\frac{1}{2}\,y = ſ$. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION IV.

Theorême.

10. EN *ſuppoſant encore les mêmes choſes, ſi l'on prend* AG, *menée par le ſommet* A *parallele aux appliquées* PM, *pour l'axe de la parabole, &* GM *parallele à* AP, *pour l'appliquée, en nommant* AG *ou* PM, x; GM, *ou* AP, y; *& le parametre* 4AF, 4a. *Je dis que* 4AF × GM = AG^2.

DE'MONSTRATION.

L'ON a par la premiere Propoſition $4ay = xx$. *C. Q. F. D.*

L'on n'a mis ici cette Propoſition que pour faire voir qu'il eſt indifferent de prendre celui qu'on voudra des deux axes conjuguez pour l'abciſſe, & l'autre pour l'ap-

pliquée ; ce qui convient à toutes les courbes Geometriques, où les deux indéterminées forment toujours un parallelogramme que nous avons nommé (art. 3 n°. 16) le parallelogramme des coordonnées.

PROPOSITION. V.

Problême.

11. UNE *équation à la parabole*, $bx = yy$, *étant donnée, décrire la parabole, lorſque les coordonnées ſont perpendiculaires l'une à l'autre.*

b, étant (n°. 7) le parametre ; x, l'abciſſe ; & y, l'appliquée de la parabole qu'il faut décrire, comme il eſt démontré dans la premiere Propoſition.

Soit A le commencement de x, qui va vers P ; & de y qui va vers B, ayant pris $AB = b$, & prolongé AP du côté de A, on fera AF, & AD chacune égale à $\frac{1}{4}b = \frac{1}{4}AB$, & l'on décrira une parabole AM par la premiere Propoſition qui ſatisfera au Problême, & dont A ſera le ſommet, F le foyer, & D le point generateur.

DEMONSTRATION.

AYANT mené une ordonnée quelconque PM ; AF étant, $\frac{1}{4}b$; AP, x ; PM, y ; FP ſera, $x - \frac{1}{4}b$, ou $\frac{1}{4}b - x$; & $FM = PD$ (n°. 2), $x + \frac{1}{4}b$. Et le triangle rectangle FPM donnera $xx + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb = xx - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb + yy$ qui ſe reduit à $bx = yy$. C. Q. F. D.

REMARQUE

12. SI l'on avoit nommé (Prop. 1) DP, x ; & DF, a ; l'on auroit trouvé $2ax - aa = yy$; & ſi l'on avoit nom-

mé FP, x; & DF, a; l'on auroit trouvé $2ax + aa = yy$. Ce qui fait voir que lorſqu'une équation à la parabole a plus de deux termes, l'origine des inconnues n'eſt point au ſommet de l'axe.

PROPOSITION VI.

Problême.

XI. *UNE parabole* AM, *dont l'axe eſt* AP, *le ſommet* A, *le foyer* F, *le point generateur* D, *& la ligne generatrice* EDH, *étant donnée. On propoſe de mener d'un point quelconque* M, *donné ſur la parabole, la tangente* MT. FIG. 51.

Ayant mené par le point donné M la droite MH paralle à l'axe AP, & joint les points F, H; la ligne MOT menée du point M par le point O milieu de FH, ſera la tangente cherchée.

DE'MONSTRATION.

PUISQUE (Art. 10. n°. 2.) $MF = MH$, & que FH eſt coupée par le milieu en O; la ligne MO eſt perpendiculaire à FH; c'eſt pourquoi ſi l'on prend ſur MO prolongée ou non prolongée un point quelconque G, d'où l'on mene GF, & GH, & GI parallele à AP, le triangle FGH ſera iſoſcele: mais à cauſe de l'angle droit GIH, GH ſurpaſſe GI; c'eſt pourquoi GF ſurpaſſe auſſi GI; & par conſequent le point G eſt hors de la parabole, & partant MO ne la rencontre qu'au point M, où elle la touche. *C. Q. F. D.*

On peut ajouter pour confirmer cette Démonſtration, que ſi d'un point quelconque R pris au dedans de la parabole, on mene RF du point R au foyer, & RH parallele à AP qui rencontre la parabole en M, & la generatrice en H, la ligne RH ſurpaſſera toujours RF: car ayant mené MF, elle ſera (Art. 10. n°. 2.) $= MH$: mais $RM + MF$ ſurpaſſent RF; & partant RH ſurpaſſe RF; c'eſt pourquoi puiſque GF ſurpaſſe GI, le point G eſt hors de la parabole. On ne peut pas dire que le

point G ſoit ſur la parabole: car $GF(=GH)$ ſeroit $=GI$.

COROLLAIRE I.

1. IL eſt clair que MO prolongée rencontre l'axe AP auſſi prolongée en T : car l'angle FOT étant droit, l'angle OFT ſera aigu.

COROLLAIRE II.

2. SI l'on prolonge HM vers R, & la tangente MO du côté de M vers S ; l'angle RMS ſera égal à l'angle $OMF=OMH$.

COROLLAIRE III.

3. D'OÙ il ſuit par les loix de la *Catoptrique* que ſi le foyer F étoit un point lumineux, les rayons reflechis à la rencontre de la parabole ſeroient paralleles à l'axe. Ou ce qui eſt la même choſe, les rayons paralleles à l'axe venant d'un point lumineux infiniment éloigné, ſe reflechiſſant à la rencontre de la parabole, leurs réflechis paſſeroient tous au foyer F.

PROPOSITION VII.
Theorême.

4. *EN ſuppoſant la même choſe que dans la Propoſition précedente. Je dis que, ſi l'on mene par le point touchant* M, *la droite* MQ *parallele à* HF, *qui rencontrera l'axe* AP *en* Q, *la partie de l'axe* PQ, *compriſe entre le point* Q, *& l'ordonnée* PM *qui part du point* M, *ſera égale à la moitié du parametre de l'axe de la parabole.*

DE'MONSTRATION.

A Cauſe des paralleles HF, MQ & HM, FQ, les triangles MPQ, HDF ſont ſemblables & égaux ; c'eſt pourquoi $PQ=DF=$ (Prop. 1.) à la moitié du parametre de l'axe.

DE'FINITION.

5. LA ligne PT eſt nommée *ſoutangente*, MQ *perpendiculaire* ; & PQ, *ſouperpendiculaire*, ou *ſounormale*.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

6. *LES choſes demeurant dans le même état que dans la Propoſition precedente. Je dis que la ſoutangente* PT *eſt double de l'abſciſſe* AP, *compriſe entre le ſommet* A *& l'ordonnée* PM *qui part du point touchant* M.

Ayant nommé comme dans la premiere Propoſition les données AF, ou AD; a; PQ (n°. 5.) $2a$; & les variables AP, x; PM, y; PT, t.

Il faut prouver que $t = 2x$.

DE'MONSTRATION.

L'ANGLE *FOT* étant (Prop. 6) droit, l'angle QMT (n°. 4) ſera auſſi droit; c'eſt pourquoi $2a$ (QP). y (PM) :: y. t (PT); donc $2at = yy$: Mais (Prop. 1) $4ax = yy$; donc $2at = 4ax$; & partant $t = 2x$. *C. Q. F. D.*

7. Cette Propoſition fournit un moyen aiſé de mener une tangente à la parabole; car ſi d'un point quelconque M, on mene l'ordonnée MP perpendiculaire à l'axe AP; ayant fait $AT = AP$, la ligne MT ſera la tangente cherchée.

PROPOSITION IX.

Theorême.

8. *UNE Parabole* AM *dont* AP *eſt l'axe*; A, *le ſommet*; F, *le foyer*; D, *le point generateur*; DE, *la ligne generatrice. Si par un point quelconque* M *pris ſur la parabole, on mene* (n°. 7) *la tangente* MT, *& par quelqu'autre point* L, *la ligne* LG *parallele à la tangente* MT. *Je dis que la ligne* MR *menée par le point touchant* M *parallele à l'axe* AP, *coupera* GL *par le milieu en* O.

Ayant mené par les points L, M, O, & G. Les lignes BLI qui rencontre MR prolongée en I, MP, OC,

FIG. 52. & GRS perpendiculaires à l'axe AP, & nommé AF, ou AD, a; le parametre de l'axe ſera (Art. 10) $4a = 4AF$; AP, x; PM, ou BI, ou SR, y; AC, m; BC, ou IO, f; CS, ou OR, z; AB ſera, $m - f$; AS, $m + z$; CP, ou OM, $m - x$; & PT (n° 6), $2x$.

Il faut prouver que $OG = OL$, ou ce qui revient au même $OR = OI$, ou $f = z$.

DE'MONSTRATION.

LES triangles ſemblables (Conſt) TPM, ORG, OIL, donnent les deux Analogies ſuivantes.

$TP(2x).PM,(y) :: OR(z).RG = \frac{yz}{2x}$, &

$TP(2x).PM(y) :: OI(f).IL = \frac{yf}{2x}$; donc $SG = y + \frac{yz}{2x}$, & $BL = y - \frac{yf}{2x}$: mais (Art. 10 n° 8)

$x(AP).m + z(AS) :: yy(PM^2).yy + \frac{2yyz}{2x} + \frac{yyzz}{4xx}(SG^2)$. & $x(AP).m - f(AB) :: yy(PM^2).yy - \frac{2yyf}{2x} + \frac{vvff}{4xx}(BL^2)$, d'où l'on tire ces deux équations

$A.myy + yyz = xyy + \frac{2xyyz}{2x} + \frac{xyyzz}{4xx}$, &

$B.myy - yyf = xyy - \frac{2xyyf}{2x} + \frac{xyyff}{4xx}$, & ôtant le premier membre de la ſeconde équation B du premier membre de la premiere A, & le ſecond de la ſeconde du ſecond de la premiere, l'on a $yyz + yyf = \frac{2xyyz + 2xyyf}{2x} + \frac{xyyzz - xyyff}{4xx}$, d'où l'on l'on tire $z = f$, ou $OR = OI$; donc $OL = OG$. C. Q. F. D.

Il peut arriver differens cas: car le point O s'éloignant de M, le point L tombera en A, ou de l'autre côté de A par rapport à M: mais l'on prouvera toujours de la

la même maniere que $z = f$, $OG = OL$; c'eſt pourquoi la Propoſition eſt generalement vraye.

DE'FINITIONS.

9. LA ligne *MR* parallele à l'axe *AP* eſt appellée *diametre*, parcequ'elle coupe toutes les *GL* par le milieu en *O*; le point *M*, le *ſommet* du diametre *MR*; *MO*, l'*abſciſſe*, ou *coupée*; *OL*, ou *OG*, l'*ordonnée*, ou l'*appliquée* à ce diametre.

PROPOSITION X.

Theorême.

10. *EN ſuppoſant les mêmes choſes que dans la Propoſition precedente. Je dis que le quarré d'une ordonnée quelconque* OL, *ou* OG *au diametre* MR, *eſt égal au rectangle de l'abſciſſe* MO *par* 4MF, *ou (Art.* 10. n°. 2.*), ayant prolongé* OM *en* H, *par* 4MH.

Ayant nommé l'abſciſſe *MO*, *t*; l'ordonnée *OL*, ou *OG*, *u*; *MF*, ou *MH*, *b*; & les autres lignes comme dans la Propoſition precedente.

Il faut prouver que $4bt = uu$, ($4MF \times MO = OG^2$).

DE'MONSTRATION.

SI l'on ajoute les deux premiers & les deux ſeconds membres des deux équations *A* & *B* de la Propoſition precedente, aprés avoir mis z en la place de f; puiſque (Prop. preced.) $z = f$; l'on aura $2myy = 2xyy + \frac{2xyy\,zz}{4xx}$, ou $zz = 4mx - 4xx$, ou $zz = 4tx$, en mettant t pour $m - x = PC = MO$: mais le triangle rectangle *ORG*, ou *OIL* donne zz (OR^2) + $\frac{yy\,zz}{4xx}$ (RG^2. Prop. preced.) = uu (OG^2, ou OL^2), qui devient $4tx + 4at = uu$ en mettant pour zz ſa valeur $4tx$, & pour yy ſa valeur (Prop. 1) $4ax$: mais $x + a = PD = MF = MH = b$;

donc en ſubſtituant b en la place de $x + a$ dans l'équation precedente, elle deviendra $4bt = uu$, ou $4MF \times MO = OG^2$. C. Q. F. D.

DEFINITION.

11. LA ligne égale à $4b = 4MF = 4MH$ eſt nommée le *parametre* du diametre MO.

PROPOSITION XL

Problême.

12. *UNE équation à la parabole* ($ax = yy$) *dont les coordonnées* x & y *ne ſont point perpendiculaires, étant donnée, décrire la parabole.*

FIG. 53. Soit M le ſommet du diametre MO, dont le parametre eſt a, & l'origine des variables x, qui va vers O, & y qui va vers K en faiſant avec MO l'angle oblique OMK. Il faut décrire par M la parabole LMG dont l'équation eſt $ax = yy$.

Ayant prolongé OM & pris $MH = \frac{1}{4}a =$ (Prop. preced.) au quart du parametre du diametre MO, on menera par H la droite HE perpendiculaire à HO, qui ſera (Prop. preced.) la ligne generatrice ; & ayant fait l'angle $KMF =$ l'angle KMH, pris $MF = MH$ & mené par F la ligne FD parallele à MO qui coupera la generatrice HE en D. Par la Propoſition precedente, & par la ſixiéme, F ſera le foyer ; FD, l'axe ; D le point generateur, & A milieu de FD le ſommet de l'axe de la parabole qu'il faut décrire. On la décrira par la premiere Propoſition.

DEMONSTRATION.

ELLE eſt claire par la Propoſition precedente, & par la ſixiéme.

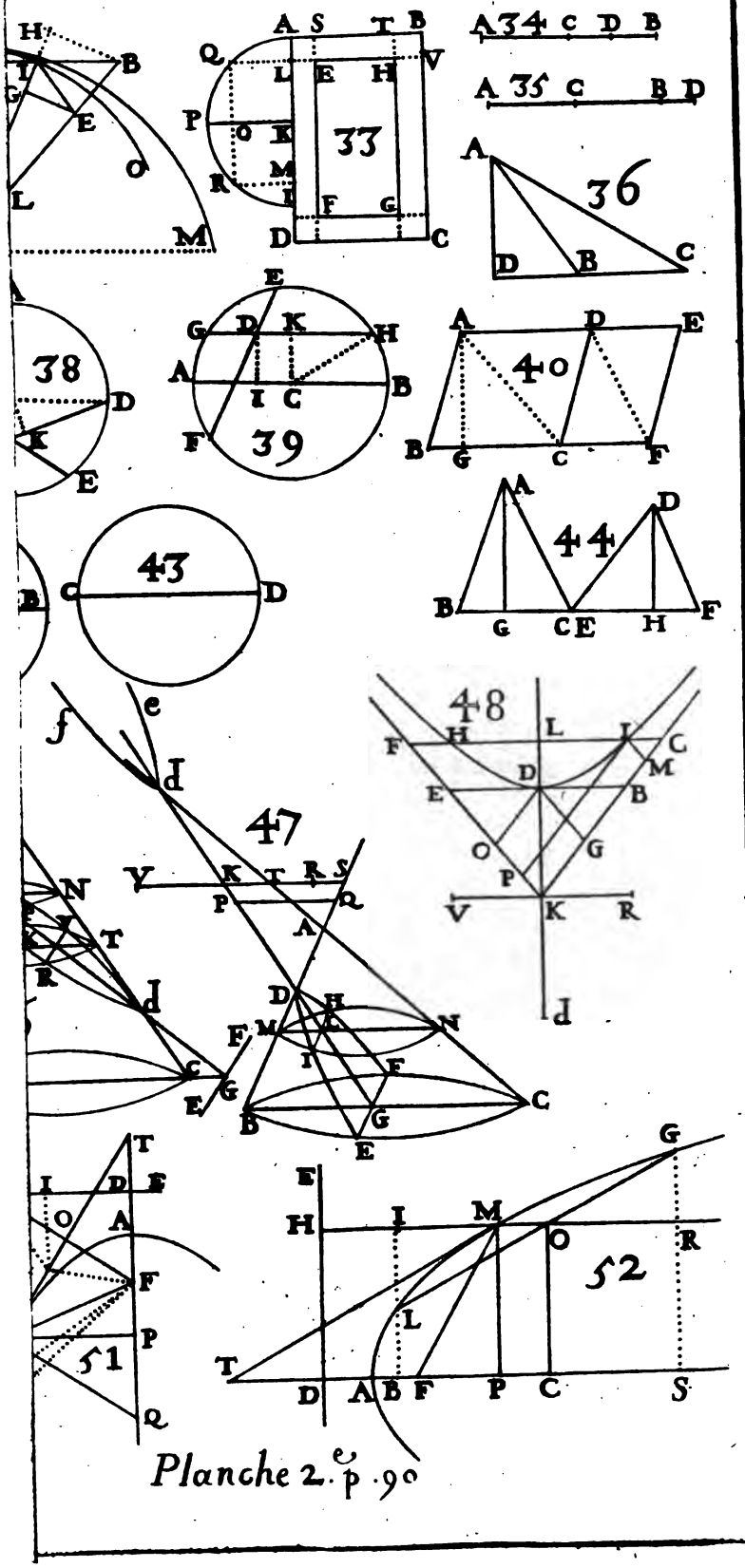


Planche 2. e p. 90

SECTION VI.

Où l'on démontre les principales proprietez de l'Ellipſe décrite par des points trouvez ſur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorême.

XII. *UNE ligne droite* AB, *diviſée par le milieu en* C, *& deux points fixes* F, G *également diſtans du milieu* C, *ou des extremitez* A *&* B, *étant donnée de grandeur & de poſition ; ſi l'on prend entre* F *&* G *un point quelconque* H, *& que du centre* F *& du rayon* AH; *du centre* G *& du rayon* BH, *l'on décrive deux cercles ; ces deux cercles ſe couperont en deux points* M, m *de part & d'autre de la ligne* AB ; *puiſque leurs demidiametres ſurpaſſent* FH + HG. *Et je dis que les points* M *&* m, *& tous ceux qui ſeront trouvez de la même maniere, en prenant d'autres points* H, *ſeront à une Ellipſe dont* C *eſt le centre,* AB *le grand axe,* DE *l'axe conjugué à l'axe* AB, *qui eſt double de la moyenne proportionnelle entre* AF *&* FB, *ou* AG *&* GB. FIG. 54.

DEMONSTRATION.

D'UN des points M, trouvez comme on vient de dire, ayant abbaiſſé la perpendiculaire MP, mené FM & GM, & nommé les données AC, ou CB, a ; FC, ou CG, c ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; AP ſera, $a - x$; PB, $a + x$; FP, $c - x$ ou, $x - c$; & PG, $c + x$.

Il eſt clair par la deſcription que $FM + MG = AB = 2a$; puiſque $FM = AH$, & $MG = HB$; nommant donc la difference de FM, & MG, $2f$; FM ſera, $a - f$ & MG, $a + f$. Cela poſé.

Les triangles rectangles FPM, GPM donneront, $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2af + ff$, & $cc + 2cx + xx + yy = aa + 2af + ff$, & en ôtant la premiere de la seconde, le premier membre du premier & le second du second, l'on aura $4cx = 4af$, d'où l'on tire $f = \frac{cx}{a}$, & mettant cette valeur de f, & celle de son quarré ff dans l'une des deux premieres équations, l'on aura $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa}$ d'où l'on tire en reduisant, transposant, & divisant par $aa - cc$, $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$.

Mais lorsque le point P tombe en C, PM (y) devient CD, & (x) devient nulle, ou $= o$; c'est pourquoi en effaçant le terme xx, l'on a $aa = \frac{aayy}{aa - cc}$, ou $aa - cc = yy = CD^2$, & partant $y = \pm CD$: nommant donc CD, b; l'on a, $aa - cc = bb$; d'où l'on tire $a - c$ (AF). b (CD) :: b (CD) $a + c$ (FB). Qui est une des choses qu'il falloit démontrer. Or mettant bb dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$ en la place de $aa - cc$ l'on a, $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$. Et comme cette équation est la même que celle qu'on a trouvée (Art. 9 n. 10) il suit que la courbe $ADBE$ est une Ellipse. Ce qui est une des autres choses proposées.

Si dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, l'on fait $y = o$, l'on aura $xx = aa$; donc $x = \pm a$, ce qui fait voir que l'Ellipse passe par les points A & B. Et en faisant $x = o$ l'on a trouvé $y = \pm CD$ qui montre que l'Ellipse AM passe aussi par les points D & E, en faisant $CE = CD$; c'est pourquoi (Art. 9 n. 6) AB, est le diametre principal de l'Ellipse; DE son axe conjugué, & C le centre. Ce qu'il falloit enfin démontrer.

DEFINITIONS.

1. LES points F & G ſont nommez les *foyers* de l'Elliſe ; CP, l'*abciſſe* ou *coupée*, & PM, ou Pm l'*ordonnée*, ou l'*appliquée* à l'axe AB.

COROLLAIRE I.

2. IL eſt clair que les lignes FM, GM menées des foyers à la circonference de l'Ellipſe ſont, par la deſcription, enſemble égales à l'axe AB, & que $PM = Pm$.

COROLLAIRE II.

3. IL eſt auſſi évident que le rectangle des deux parties AF, FB ou AG, GB de l'axe AB faites par un des foyers F, ou G, eſt égal au quarré du demi axe conjugué DC: car dans la Démonſtration precedente l'on a trouvé $aa - cc = CD^2$. Or $aa - cc = a + c \times a - c$, $AF \times FB = CD^2$.

COROLLAIRE III.

4. ON voit par les termes de l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, & par les ſignes $+$ & $-$ qui les precedent que x croiſſant y diminue : car plus x devient grande, plus $aa - xx$ diminue, & par conſequent auſſi yy ; puiſque les quantitez conſtantes aa, & bb demeurent toujours de même grandeur ; ce qui fait voir que les points M & m de l'Ellipſe, s'approchent dautant plus de l'axe AB, que le point P s'éloigne de C. On voit auſſi que l'on ne peut augmenter x que juſqu'à ce qu'elle devienne $= a$; auquel cas $aa - xx$ devient $= aa - aa = 0$; & par conſequent auſſi $y = 0$, ce qui fait voir que les points M & m ſe confondent alors avec les points A & B, & que l'Ellipſe coupe l'axe en ces points, comme on a déja remarqué.

COROLLAIRE IV.

5. L'EQUATION à l'Ellipſe $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ étant réduite en analogie donne $aa - xx$ ($AP \times PB$) . yy (PM^2) :: aa (AC^2) . bb (CD^2) :: $4aa$ (AB^2) . $4bb$ (DE^2), c'eſt-à-dire que le rectangle des deux parties AP, PB de l'axe AB faites par l'appliquée PM eſt au quarré de l'appliquée PM: comme le quarré de l'axe AB eſt au quarré de l'axe conjugué DE.

COROLLAIRE V.

6. SI l'on fait AB ($2a$) . DE ($2b$) :: DE ($2b$) . $\frac{2bb}{a}$, la ligne $= \frac{2bb}{a}$ que je nomme *p*ſera (Art. 9 n°. 13) le parametre de l'axe AB. Or puiſque $a . b :: b . \frac{1}{2} p$, l'on a auſſi $a . \frac{1}{2} p :: aa . bb$; donc $bb = \frac{1}{2} aap$; donc $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$; C'eſt pourquoi ſi l'on met dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, en la place de $\frac{aa}{bb}$, en la place de $\frac{aa}{bb}$ ſa valeur $\frac{2a}{p}$, l'on aura $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$; d'où l'on tire cette analogie, $aa - xx$. ($AP \times PB$) . yy (PM^2) :: $2a$ (AB) . p, c'eſt-à-dire que le rectangle des deux parties de l'axe faites par l'apliquée eſt au quarré de l'apliquée ; comme le même axe ; eſt à ſon parametre.

COROLLAIRE VI.

7. IL ſuit du Corollaire précedent que le rectangle de l'axe AB par ſon parametre eſt égal au quarré de l'axe conjugué DE ; puiſque $AB . DE :: DE . p$.

COROLLAIRE VII.

8. Si au lieu de $\frac{aa}{bb}$ ou de $\frac{ae}{f}$ on met un autre rapport égal comme $\frac{m}{n}$ l'on aura, $aa - xx = \frac{myy}{n}$; c'eſt pourquoi l'on fera ſur l'équation à l'Ellipſe les trois remarques ſuivantes, aprés avoir délivré l'un des quarrez inconnus qu'elle renferme de toute quantité connue.

REMARQUE I.

9. Lorsque l'antecedent du rapport qui accompagne un des quarrez inconnus de l'équation à l'Ellipſe eſt égal & ſemblable au terme connu ; ou ce qui eſt la même choſe, ſi cet antecedent renferme les mêmes lettres que le terme connu de l'équation ; ſa racine quarrée exprimera le demi diametre dont l'autre inconnue exprime les parties ; & la racine quarrée du conſequent exprimera le demi diametre conjugué.

REMARQUE II.

10. Lorsque cet antecedent eſt le double de la racine quarrée du terme connu, il exprimera le diametre dont l'autre inconnue exprime les parties ; & le conſequent exprimera ſon parametre.

REMARQUE III.

11. En tout autre cas ce rapport marque le rapport du diametre, dont une partie eſt exprimée par l'autre inconnue, à ſon parametre, ou le rapport du quarré du même diametre au quarré du diametre conjugué. Tout cela eſt évident (n°. 6 & 8).

COROLLAIRE VIII.

12. D'où il ſuit qu'une équation à l'Ellipſe renferme les expreſſions des deux diametres conjuguez, qui forment

la parallelogramme des coordonnées, ou de l'un de ces diametres, & de ſon parametre, ou la raiſon du quarré de l'un des diametres au quarré de l'autre, ou enfin celle de l'un des deux à ſon parametre : de ſorte qu'on aura toujours les deux diametres conjuguez par le moyen de l'équation.

Par exemple, dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ le terme connu aa eſt le quarré du demi diametre AC; l'antecedent aa du rapport $\frac{aa}{bb}$ qui accompagne yy eſt ſemblable & égal au terme connu aa; c'eſt pourquoi le conſequent bb eſt le quarré du demi diametre conjugué CD à l'axe ou au diametre principal AC. Dans l'équation $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$, l'antecedent $2a$ étant double de la racine du terme connu aa; $2a$ ſera le diametre AB, & p ſon parametre : & partant, ſi l'on fait $2a . p :: aa . \frac{1}{4} ap$; $\frac{1}{2} ap$ ſera l'expreſſion du quarré du demi diametre conjugué CD; & partant $CD = \sqrt{\frac{1}{2} ap}$. Enfin dans l'équation $aa - xx = \frac{myy}{n}$, aa exprime le quarré du demi diametre AC dont les parties CP ſont nommées x; & partant $AB = 2a$. Mais pour avoir l'expreſſion du demi diametre DE conjugué au diametre AB, l'on fera $m . n :: aa . \frac{naa}{m}$; & partant $\sqrt{\frac{n}{m}} aa = CD$, & $2\sqrt{\frac{n}{m}} aa = DE$. Et pour avoir l'expreſſion du parametre du diametre AB, l'on fera $m . n :: 2a . \frac{2an}{m}$, & cette quantité $\frac{2an}{m}$ ſera l'expreſſion cherchée.

COROLLAIRE

COROLLAIRE. IX.

13. SI l'on nomme AP, x; BP ſera, $2a - x$, & l'on aura (n°. 5) $2ax - xx$ ($AP \times PB$). yy (PM^2) :: aa (AC^2). bb (CD^2); donc $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$, qui montre que lorſque les indéterminées n'ont point leur origine au centre de l'Ellipſe, il ſe trouve des ſeconds termes dans ſon équation, & qu'une équation locale appartiendra toujours à l'Ellipſe, lorſqu'elle renfermera deux quarrez inconnus, l'un deſquels ou tous deux ſeront accompagnez de quelque quantité connue, & auront differens ſignes dans les deux membres de l'équation, ou même ſigne dans le même membre, quelque mêlange de conſtantes qu'il s'y rencontre, & pourvû que les deux inconnues ne ſoient point multipliées l'une par l'autre.

COROLLAIRE X.

14. SI dans l'équation à l'Ellipſe $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, ou $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$, $a = b$; l'on aura $aa - xx = yy$; ou $2ax - xx = yy$; qui eſt une équation au cercle, pourvû que les coordonnées x & y faſſent un angle droit : car l'une & l'autre de ces deux équations donne $AP \times PB = PM^2$ qui eſt la principale proprieté du cercle. D'où l'on voit auſſi que l'équation à l'Ellipſe ne differe de celle du cercle, qu'en ce que l'un des quarrez inconnus eſt accompagné de quelque quantité connue dans l'équation à l'Ellipſe, & qu'ils en ſont tous deux délivrez dans l'équation au cercle. En effet le cercle peut être regardé comme une Ellipſe dont les foyers ſont confondus avec le centre, & dont tous les diametres ſont par conſequent égaux entr'eux, & à leurs parametres.

Dans l'équation au cercle $aa - xx = yy$, les coordonnées ont leur origine au centre, & dans celle-ci, $2ax - xx = yy$, l'origine des coordonnées n'eſt point au centre.

PROPOSITION II.

Theorême.

15. LES mêmes choſes que dans la premiere Propoſition étant ſuppoſées. Je dis que l'appliquée FO au foyer F eſt égale à la moitié du parametre de l'axe AB.

Il faut prouver que $FO = \frac{1}{2} p$.

DEMONSTRATION.

SI dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$, on fait $x (CP) = c (CF)$, le point P tombera en F, & PM deviendra FO; & l'on aura $aa - cc = \frac{yyaa}{aa - cc}$, d'où l'on tire $y = \frac{aa - cc}{a} =$ (Prop. 1.) $\frac{bb}{a} =$ (nº. 6) $\frac{1}{2} p$. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

Problême.

16. LES deux axes conjuguez AB, DE d'une Ellipſe étant donnez, trouver les foyers F, & G.

Soit du centre D, extremité de l'axe conjugué DE; & du rayon AC, décrit un cercle qui coupera AB en deux points F & G qui ſeront les foyers qu'il falloit trouver.

DEMONSTRATION.

PAR la conſtruction $FD + DG = AB$; donc (nº. 2) F & G ſont les foyers. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

Problême.

17. LE grand axe AB d'une Ellipſe & les foyers F & G étant donnez, déterminer l'axe conjugué à l'axe AB.

Soit du foyer F pour centre, & pour rayon le demi axe AC décrit un cercle. Il coupera la perpendiculaire à AB menée par le centre C en deux points D & E, & DE ſera l'axe conjugué à l'axe AB.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt la même que celle de la Propoſition precedente.

PROPOSITION V.

Theorême.

18. *SI l'on fait* MQ *perpendiculaire à* DE. *Je dis que le rectangle des deux parties* DQ, QE *de l'axe* DE *faites par l'appliquée* MQ, *eſt au quarré de* MQ : *comme* DE^2 *quarré de l'axe* DE *à* AB^2 *quarré de l'axe* AB.

En laiſſant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a donnez dans la premiere Propoſition, CP, ou QM étant x; & PM, ou CQ, y; DQ ſera, $b-y$; & QE, $b+y$.

Il faut démontrer que $bb-yy \,.\, xx :: 4bb \,.\, 4aa$.

DE'MONSTRATION.

EN reprenant l'équation de la premiere Propoſition $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, la multipliant par bb, la diviſant par aa & tranſpoſant l'on aura $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$, d'où l'on tire cette analogie $bb - yy \,.\, xx :: bb \,.\, aa :: 4bb \,.\, 4aa \,.\, DQ \times QE \,.\, QM^2 :: DE^2 \,.\, AB^2$. C. Q. F. D.

DE'FINITION.

19. SI l'on fait $2b \,.\, 2a :: 2a \,.\, \frac{2aa}{b}$ que je nomme p; la ligne $= p$ eſt appellée le *parametre* de l'axe DE.

COROLLAIRE

20. $b . a :: 2a . p$, donne $bp = 2aa$, ou $bbp = 2aab$, ou $\frac{2b}{p} = \frac{bb}{aa}$; c'eſt pourquoi ſi on met $\frac{2b}{p}$ en la place de $\frac{bb}{aa}$ dans l'équation precedente, l'on aura $bb - yy = \frac{2bxx}{p}$, ou ſi l'on fait $\frac{m}{n} = \frac{2b}{p}$, l'on aura $bb - yy = \frac{mxx}{n}$.

On ajoutera à ce Corollaire les raiſonnemens que l'on a faits n°. 9, 10, 11, 12, 13 & 14.

PROPOSITION VI.

Problême.

21. *UNE équation à l'Ellipſe* $ab - xx = \frac{cyy}{d}$ *étant donnée, décrire l'Ellipſe lorſque les coordonnées ſont un angle droit.*

Soit premierement trouvé une moyenne proportionnelle entre a, & b qui ſoit f ; & par conſequent $ff = ab$; ainſi l'équatiou ſera $ff - xx = \frac{cyy}{d}$. On fait ce changement parceque ab étant l'expreſſion du quarré du demi diametre dont les parties ſont nommées x, cette expreſſion doit auſſi être un quarré.

Soit preſentement C, l'origine des inconnues x, qui va vers A & vers B, & y, qui va vers D & vers E. Le même point C doit auſſi être le centre de l'Ellipſe ; puiſque les inconnues x & y n'ont point de ſecond terme dans l'équation. Soit fait CA & CB chacune $= f$; AB ſera le grand axe, ſi c ſurpaſſe d ; le petit, ſi c eſt moindre que d. Pour avoir l'axe conjugué à l'axe AB, ſoit fait $c . d :: ff . \frac{dff}{c}$, & ſoit priſe CD & CE chacune égale à $\sqrt{\frac{dff}{c}}$; DE ſera (n°. 12) l'axe cherché. Ayant

enſuite trouvé les foyers *F* & *G* par la troiſiéme Propoſition, on décrira l'Ellipſe par la premiere.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt evidente par ce que l'on a démontré nº. 12. Prop. 1 & 3.

PROPOSITION VII.

Problême.

XIII. UNE *Ellipſe* ADBE, *dont* AB *eſt le grand axe*; C, *le centre*; F *&* G, *les foyers, étant donnée. Il faut d'un point quelconque* M *donné ſur l'Ellipſe mener la tangente* MT. FIG. 55.

Ayant mené *FM*, & *GM*, prolongé *FM*, en *I*, en ſorte que *MI* = *MG*, & mené *GI*. Je dis que la ligne *MO* menée du point *M* par le point *O* milieu de *GI* ſera la tangente cherchée.

DE'MONSTRATION.

D'UN point quelconque *L* autre que *M* pris ſur *MO*, ayant mené les droites *LF*, *LG*, *LI*; puiſque par la conſtruction *MG* = *MI*, & *IO* = *OG*, *MO* ſera perpendiculaire à *GI*; c'eſt pourquoi le triangle *GLI* ſera iſoſcele; & partant *FL* + *LI* = *LF* + *LG* ſurpaſſe *FM* + *MI* = *FM* + *MG*; donc le point *L* eſt hors de l'Ellipſe. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

1. SI l'on mene *MK* parallele à *IG*; l'angle *KMO* ſera droit: puiſque (Conſt.) *GI* eſt perpendiculaire à *MO*.

COROLLAIRE II.

1. LA ligne *MK* partage l'angle *FMG* en deux également: car à cauſe de *KM* parallele à *GI*, l'angle *FMK* = *FIG* = *MGI* = *GMK*.

COROLLAIRE III.

3. LA tangente *MO* rencontre l'axe *AB* prolongé en *T*; car l'angle *GOT* étant droit, l'angle *OGT* ſera aigu.

COROLLAIRE IV.

4. L'ANGLE *FML* eſt égal à l'angle *GMO*; puiſqu'ils ſont les complemens des angles égaux *FMK*, *GMK*; d'où il ſuit que ſi le foyer *G* étoit un point lumineux, les rayons reflechis à la rencontre de l'Ellipſe paſſeroient tous par le foyer *F*.

DE'FINITIONS.

5. AYANT abbaiſſé du point *M* ſur l'axe *AB* la perpendiculaire *MP*. *PT* eſt appellée la *ſoutangente*, *MK* la *perpendiculaire*; & *PK*, la *ſouperpendiculaire*, ou *ſounormale*.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

6. *AYANT ſuppoſé les mêmes choſes que dans la Propoſition precedente; & nommé comme dans la premiere Propoſition* AC, *ou* CB, a; CF, *ou* CG, c; CP, x; PM, y; FP *ſera* $c+x$, *&* GP, $c-x$, *ou* $x-c$; *cela poſé. Je dis que l'expreſſion algebrique de la ſoutangente* PT *ſera* $\frac{2x-xx}{x}$.

DE'MONSTRATION.

LE triangle rectangle *GPM* donne $GM = \sqrt{cc-2cx+xx+yy}$. Et parceque *MK* eſt parallele à *GI*, & que $FI =$ (Prop. preced.) $FM+MG =$ (art. 12 n°. 2) $AB = 2a$, l'on a $FI\ (2a).FG\ (2c) :: MI$, ou $MG\ (\sqrt{cc-2cx+xx+yy}).GK = \frac{c\sqrt{cc-2cx+xx+yy}}{a}$; donc $PK = x-c+\frac{c\sqrt{cc-2cx+xx+yy}}{a}$, ou $\frac{ax-ac+c\sqrt{cc-2cx+xx+yy}}{a}$, &

à cauſe de l'angle droit KMT, l'on a PK $\left(\frac{ax-ac+c\sqrt{cc-2cx+xx-yy}}{a}\right)$. $PM(y) :: PM(y)$. PT $= \frac{ayy}{ax-ac+c\sqrt{cc-2cx+xx+yy}}$: mais (Prop. 1) $aa - xx = \frac{aayy}{aa-cc}$, d'où l'on tire $yy = \frac{a^4-2aacc-2aaxx+2ccxx}{aa}$; c'eſt pourquoi en mettant cette valeur de yy dans celle de PT, l'on aura aprés la réduction, & diviſion, PT $= \frac{a^4-aacc-aaxx+ccxx}{aax-aac+c\sqrt{a^4-2aacx+ccxx}}$: mais $a^4 - 2aacx + ccxx$ eſt un quarré dont la racine eſt $aa - cx$; c'eſt pourquoi cette derniere valeur de PT ſe change en celle-ci, aprés avoir ôté ce qui ſe détruit, & diviſé les deux termes de la fraction par $aa - cc$. $PT = \frac{aa-xx}{x}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

7. $CP(x)$. $PB(a-x) :: AP(a+x)$. $PT\left(\frac{aa-xx}{x}\right)$ ce qui fournit un autre moyen de mener la tangente MT.

COROLLAIRE II.

8. Si l'on ajoute $x = CP$ à l'expreſſion de $PT = \frac{aa-xx}{x}$ l'on aura $CT = \frac{aa}{x}$ qui fournit encore un autre moyen de mener une tangente à l'Ellipſe, en faiſant $CP(x)$. $CB(a) :: CB(a)$. $CT\left(\frac{aa}{x}\right)$.

COROLLAIRE III.

9. Si de $\frac{aa}{x} = CT$, l'on ôte $a = CB$, l'on aura $BT = \frac{aa-ax}{x}$, qui donne encore un autre moyen de mener

une tangente à l'Ellipſe en faiſant $CP(x).PB\left(a-x\right.$ $:: CB(a).BT\left(\frac{aa-ax}{x}\right)$.

COROLLAIRE IV.

10. IL eſt clair que l'angle CMT eſt toujours obtus : car la perpendiculaire MK à la tangente MT diviſant l'angle GMF en deux également, GM étant moindre que FM, GK ſera auſſi moindre que FK ; & par conſequent le point K tombera toujours entre C, & G.

PROPOSITION IX.

Theorême.

11. *AYANT ſuppoſé les mêmes choſes que dans la Prop. precedente. Si l'on prolonge le petit axe* CD, *& la tangente* MO *du côté de* M, *ces lignes ſe rencontreront en un point* H ; *ſi l'on mene* MQ *parallele à* BC, *& qu'on nomme* CD, b ; *en laiſſant aux autres lignes les noms qu'on leur a donnez en la Propoſition precedente. Je dis que l'expreſſion Algebrique de la ſoutangente* QH, *ſera* $\frac{aa-yy}{y}$.

DE'MONSTRATION.

PQ étant le parallelogramme des coordonnées $CQ=PM$ ſera $,y$; & $MQ=CP,x$. Et les triangles ſemblables TPM,MQH donneront $TP\left(\frac{aa-xx}{x}\right).PM,(y)$ $:: MQ\ (x).QH=\frac{xxy}{aa-xx}$: mais (Prop. 1) $aa-xx$ $=\frac{aayy}{bb}$; donc $xx=\frac{aabb-aayy}{bb}$; mettant donc cette valeur de xx dans celle de QH, l'on aura aprés la reduction, $QH=\frac{bb-yy}{y}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE

COROLLAIRE.

12. Si l'on ajoute $y = PQ$ à $QH = \frac{bb-yy}{y}$, l'on aura $CH = \frac{bb}{y}$, d'où l'on tire $CQ(y).CD(b) :: CD(b) : GH(\frac{bb}{y})$.

PROPOSITION X.

Theorême.

13. *SOIT une Ellipſe* ADBE, *dont* AB *&* DE *ſont les axes conjuguez*; C, *le centre*; MT, *une tangente qui rencontre les axes conjuguez en* H *& en* T. *Je dis que la ligne* GOL *parallele à la tangente* MT *ſera diviſée en deux également en* O *par la ligne* MCV *menée du point touchant* M *par le centre* C. FIG. 56.

Ayant mené par les points L, M, O, G, les lignes LK, MP, OQ, GX perpendiculaires à l'axe AB, & par O la ligne RON parallele à AB qui rencontrera KL en N, & XG en R, & nommé les données AC, ou CB, a; CD, ou CE, b; & les indéterminées CP, x; PM, y; CQ, m; QX, ou OR, z; QK, ou ON, f; AX ſera $a+m-z$; BX, $a-m+z$; AK, $a+m+f$; & KB, $a-m-f$.

Il faut prouver que $GO = OL$, ou ce qui eſt la même choſe, $RO(z) = ON(f)$.

DÉMONSTRATION.

Les triangles ſemblables CPM, CQO donnent $CP(x).PM(y) :: CQ(m).QO = \frac{my}{x} = XR = KN$: l'on a auſſi (n°. 8) $CT = \frac{aa}{x}$, & (n°. 11) $CH = \frac{bb}{y}$, & les triangles ſemblables TCH, ORG, ONL, donnent

$TC\left(\frac{aa}{x}\right).CH\left(\frac{bb}{y}\right) :: OR\,(z).RG = \frac{bbzx}{aay}$, & $TC\left(\frac{aa}{x}\right).CH\left(\frac{bb}{y}\right) :: ON\,(f).NL = \frac{bbfx}{aay}$; donc $XG = \frac{my}{x} + \frac{bbzx}{aay}$, & $KL = \frac{my}{x} - \frac{bbfx}{aay}$. Mais (art. 12 n°. 5) $aa\,(CB^2).bb\,(CD^2) :: aa - mm + 2mz - zz\,(AX \times XB).\frac{mmyy}{xx} + \frac{2bbmz}{aa} + \frac{b^4zzxx}{a^4yy}\,(XG^2)$, & $aa\,(CB^2).bb\,(CD^2) :: aa - mm - 2mf - ff\,(AK \times KB).\frac{mmyy}{xx} - \frac{2bbmf}{aa} + \frac{b^4ffxx}{a^4yy}\,(KL^2)$ d'où l'on tire ces deux équations.

A. $\frac{aammyy}{xx} + 2bbmz + \frac{b^4zzxx}{aayy} = aabb - bbmm + 2bbmz - bbzz$, &

B. $\frac{aammyy}{xx} - 2bbmf + \frac{b^4ffxx}{aayy} = aabb - bbmm - 2bbmf - bbff$,

& ayant ôté la seconde de la premiere, le premier membre du premier, & le second du second, l'on aura celle-ci,

$2bbmz + 2bbmf + \frac{b^4zzxx}{aayy} - \frac{b^4ffxx}{aayy} = 2bbmz + 2bbmf - bbzz + bbff$, d'où l'on tire $zz = ff$, ou $z = f$, $OR = ON$; donc $GO = OL$. *C. Q. F. D.*

La position de la ligne GL peut changer en bien des manieres à mesure que le point O s'approche ou s'éloigne du centre C, ou se trouve au-delà par rapport à M : mais cela ne peut au plus que changer les signes dans les expressions des lignes AX, XB, AK, KB, XG & KL, & l'on trouvera toujours $z = f$; c'est pourquoi la Proposition est generalement vraye.

COROLLAIRE I.

14. IL est clair que la ligne FCS menée par le centre C, parallele à la tangente MT est divisée en deux égale-

ment par le centre C : car le point O tombant en C, GL devient FS, & comme le point M peut être pris indifferemment ſur tous les points de l'Ellipſe ; il s'enſuit que toutes les lignes comme FCS, ſont coupées par le milieu en C ; puiſqu'elles peuvent toujours être paralleles à une tangente MT menée par l'extremité M d'une autre ligne MCV qui paſſe auſſi par le centre C.

DE'FINITIONS.

15. LES lignes MCV, FCS qui paſſent par le centre d'une Ellipſe ſont nommées *diametres*, & lorſque deux diametres MCV, FCS ſont poſez de maniere que l'un des deux FCS eſt parallele à la tangente MT menée par l'extremité M de l'autre MCV ; ils ſont nommez *diametres conjuguez* ; & les lignes OG, OL ſont nommées *ordonnées*, ou *appliquées* au diametre MV.

COROLLAIRE II.

16. IL eſt évident que les ordonnées à un diametre quelconque ſont diviſées en deux également par le même diametre.

COROLLAIRE III.

17. IL eſt clair que la poſition des diametres conjuguez eſt déterminée par la poſition de la tangente menée par l'une de leurs extremitez.

COROLLAIRE IV.

18. SI l'on ajoute les deux équations A & B de la propoſition precedente, aprés avoir mis z en la place de f, le premier membre au premier & le ſecond au ſecond, l'on aura celle-ci $\frac{2aammyy}{xx} + \frac{2b^4xxxx}{aayy} = 2aabb - 2bbmm - 2bbzz$, ou, en ſuppoſant que le point O tombe en C, auquel cas $QK = z$ devient CI, GL devient FS, KL, SI, & $CQ = m$ devient nulle ou $= o$, ce qui détruit

les termes où m se rencontre, $\frac{bbzzxx}{aayy} = aa - xx$, d'où l'on tire $zz = aa - xx$, en mettant pour $aayy$ sa valeur $aabb - bbxx$ tirée de l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, trouvée par la premiere Proposition; d'où l'on conclud que $CI^2 = AP \times PB$: & que $CP^2 = AI \times IB$: car l'on a aussi $xx = aa - zz$.

COROLLAIRE V.

FIG. 56. 19. SI l'on fait dans cette équation $xx = aa - zz$, $z(CI) = x(CP)$; les points P & I se confondront en un seul FIG. 57. point Y, & les deux diametres conjuguez MV, FS seront égaux, & l'on aura $2xx = aa$; donc $x = \sqrt{\frac{1}{2}}\,aa$ qui servira à déterminer leur position en cette sorte. Soit prise CY moyenne proportionnelle entre CB & sa moitié, & mené par Y la perpendiculaire MYS qui rencontrera l'Ellipse aux points M & S, par où l'on menera les diametres conjuguez MV, FS qui seront égaux.

COROLLAIRE VI.

FIG. 57. 20. IL est clair que $AY \times YB = CY^2$: car l'équation (n°. 18) $xx = aa - zz$ subsiste toujours, quoique $x = z$ ou $CP = CI = CY$.

COROLLAIRE VII.

21. A Cause de $AY \times YB = CY^2 = (\text{n° } 19)\,\frac{1}{2}\,aa$; l'on a (art. 12 n° 5) $\frac{1}{2}\,aa\,(CY^2).\,yy\,(PM^2) :: aa\,(CB^2).\,bb\,(CD^2)$, d'où l'on tire $y = \sqrt{\frac{1}{2}}\,bb$, qui servira à trouver le point Q sur CD, comme l'on a trouvé (n° 19) le point Y sur CA; & la perpendiculaire FQM déterminera aussi la position des deux diametres conjuguez égaux MCV, FCS.

COROLLAIRE VIII.

12. PUISQUE (art. 12 n° 5) $AP \times PB$, ou (n° 18) $CI^2 . PM^2 :: CB^2 . CD^2$, & $AI \times IB$ ou (n° 18) $CP^2 . IS^2 :: CB^2 . CD^2$, l'on a $CI^2 . PM^2 :: CP^2 . IS^2$, ou $CI . PM :: CP . IS$, d'où il suit que les triangles CPM, CIS sont égaux. FIG. 56.

PROPOSITION XI.

Theorême.

13. *AYANT supposé les mêmes choses que dans la Proposition precedente. Je dis que le rectangle* VO × OM *des parties du diametre* MV *faites par l'appliquée* OL *est à* OL^2, *quarré de la même appliquée ; comme* VM^2, *quarré du diametre* VM, *est à* FS^2, *quarré du diametre conjugué à* VM. FIG. 56.

Ayant nommé AC, ou CB, a ; CD, ou CE, b ; CP, x ; PM, y ; OR, ou ON, z ; CQ, m ; CV ou CM, d ; FC, ou CS, f ; CO, u ; & OL ou OG, s.

Il faut prouver que $dd - uu . ss :: dd . ff :: 4dd . 4ff$.

DEMONSTRATION.

L'ON a (art. 12)

A. $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, les triangles semblables MCP, OCQ, donnent $d\,(CM) . x\,(CP) :: u\,(CO) . m\,(CQ)$; donc

B. $dm = ux$, & les triangles semblables SCI, LON, & $CI^2 =$ (n°. 18) $aa - xx$, donnent $ff\,(CS^2) . aa - xx\,(CI^2) :: ss\,(LO^2) . zz\,(ON^2)$; donc

C. $ffzz = aass - xxss$.

En reprenant presentement l'équation du quatriéme Corollaire de la Proposition precedente n° 18, qui étant divisée par 2, devient,

D. $\frac{aammyy}{xx} + \frac{b^4xxxx}{aayy} = aabb - bbmm - bbzz$, & en met-

tant dans le numerateur du premier terme, & dans le dénominateur du ſecond pour $aayy$, ſa valeur $aabb - bbxx$ tirée de l'équation A, l'on aura $\frac{aamm}{xx} + \frac{zzxx}{aa-xx} = aa - zz$, & mettant encore pour mm ſa valeur $\frac{uuxx}{dd}$ tirée de l'équation B, & pour zz, ſa valeur $\frac{aaff-xxff}{ff}$ tirée de l'équation C, l'on aura aprés les réductions & tranſpoſitions, $dd - uu = \frac{ddff}{ff}$, d'où l'on tire $dd - uu . ff :: dd . ff :: 4dd . 4ff$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

24. SI MV & FS ſont les deux diametres conjuguez égaux, d ſera $= f$; & l'équation deviendra $dd - uu = ff$, qui ſeroit une équation au cercle, ſi l'appliquée OL faiſoit un angle droit avec CM.

DE'FINITION.

25. SI l'on fait $d . f :: 2f . p$, la ligne p ſera appellée le *parametre* du diametre MV.

COROLLAIRE II.

26. LA proportion $d . f :: 2f . p$ donne $dp = 2ff$; donc en multipliant par d, l'on a $ddp = 2dff$; donc $\frac{2d}{p} = \frac{dd}{ff}$; c'eſt pourquoi ſi l'on met dans l'équation precedente pour $\frac{dd}{ff}$ ſa valeur $\frac{2d}{p}$, l'on aura $dd - uu = \frac{2dff}{p}$ d'où l'on tire $dd - uu . ff :: 2d . p$.

COROLLAIRE III.

27. L'ON peut encore mettre pour $\frac{2d}{p}$ un autre rapport $\frac{m}{n} = \frac{2d}{p} = \frac{dd}{ff}$; & l'on aura $dd - uu = \frac{mff}{n}$, d'où l'on tire $dd - yu . ff :: m . n$.

On ajoutera ici les mêmes choſes que l'on a dites art. 12. nº. 9, 10, 11, 12, 13, & 14.

PROPOSITION XII.

Theorême.

28. LES *mêmes choſes étant encore ſuppoſées, ſi l'on mene* Gq *parallele à* MV. *Je dis que* Fq × qS. qG^2 :: FS^2. VM^2.

En nommant encore *CM*, ou *CV*, *d*; *CS*, ou *CF*, *f*; *CO*, ou *qG*, *u*; *OG*, ou *Cq*, *s*; *Fq* ſera $f-s$; & *qS*, $f+s$.

Il faut prouver que $ff-ss.uu :: 4ff.4dd$.

DE'MONSTRATION.

EN reprenant l'équation de la Propoſition precedente $dd-uu=\frac{ddss}{ff}$, la multipliant par *ff*, tranſpoſant & diviſant par *dd*, l'on en tirera $ff-ss=\frac{ffuu}{dd}$, qui donnera $ff-ss.uu :: ff.dd :: 4ff.4dd$. *C. Q. F. D.*

DE'FINITION.

29. SI l'on fait $f.d :: 2d.p$, la ligne $=p$ ſera appellée le *parametre* du diametre *FS*.

COROLLAIRE I.

30. LA Proportion precedente donne $pf=2dd$; donc $pff=2fdd$, ou $\frac{2f}{p}=\frac{ff}{dd}$; mettant donc dans l'équation precedente pour $\frac{ff}{dd}$ ſa valeur $\frac{2f}{p}$, l'on aura $ff-ss=\frac{2fuu}{p}$; d'où l'on tire $ff-ss.uu :: 2f.p$.

COROLLAIRE II.

31. L'ON peut encore changer le rapport $\frac{ff}{dd}$, ou $\frac{zf}{p}$ en un autre rapport égal $\frac{mm}{n}$, & l'on aura $ff - ff = \frac{muu}{n}$, ce qui donne $ff - ff . uu :: m . n$.

On ajoutera encore ici ce qu'on a dit art. 12 n°. 9, 10, 11, 12, 13 & 14.

COROLLAIRE III.

32. IL eſt clair (n°. 25 & 29) que le rectangle de l'un des diametres conjuguez par ſon parametre eſt égal au quarré de l'autre diametre.

PROPOSITION XIII.

Problême.

33. *DEUX lignes quelconques* FS *&* MV *qui ſe coupent par le milieu en* C *à angles obliques étant données de poſition & de grandeur pour deux diametres conjuguez d'une Ellipſe, déterminer la poſition & la grandeur des axes de la même Ellipſe.*

Cette Propoſition contient deux cas qu'on pourroit neanmoins reduire à un ſeul, comme on va voir dans le ſecond : le premier eſt lorſque les lignes *FS* & *MV* ſont égales : le ſecond lorſqu'elles ſont inégales.

PREMIER CAS.

34. AYANT joint les points *M*, *S* & *M*, *F*, & ayant diviſé *MS* & *MF* par le milieu en *P* & *Q*, on menera les lignes *CP*, *CQ* indéfiniment prolongées de part & d'autre qui ſe couperont à angles droits en *C*, puiſque *CS*, *CM*, *CF* ſont égales, & que les points *P* & *Q* diviſent par le milieu *MS* & *MF*.

Soit enſuite fait $PI = CP$ & $QH = CQ$, & du centre *C* par *I*, & par *H* décrit deux cercles qui couperont *CP*, & *CQ* aux points *A*, *B*, *D* & *E*. Je dis que l'Ellipſe dont

dont AB & DE ſont les axes, paſſera par les points M, F, V & S. FIG. 58.

DE'MONSTRATION.

AYANT nommé AC, ou CB, a; CD, ou CE, b; CP, ou PI, x; PM, ou CQ, ou QH, y; l'on a par la proprieté du cercle, & par la Conſtruction, $aa - xx$ ($AP \times PB$) $= xx$ (PI^2, ou CP^2), & $bb - yy$ ($EQ \times QD$) $= yy$ (QH^2, ou CQ^2), d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, & $y = \sqrt{\frac{1}{2}bb}$; c'eſt pourquoi (n°. 19 & 21) les points S, M, V & S, ſont à l'Ellipſe dont les axes ſont AB, & DE. C. Q. F. D.

SECOND CAS.

35. SOIT prolongée CM du côté de M, & ſoit faite MK priſe ſur le prolongement, égale à la troiſiéme proportionnelle à CM & CS; & ayant mené par M la droite HMT parallele à FS, du point O milieu de CK, on élevera la perpendiculaire OG qui rencontrera HMT en un point G; puiſque (n° 13) MT eſt tangente à l'Ellipſe dont MV & FS ſont deux diam. conjuguez & que (n° 10) l'angle CMT eſt obtus, & du centre G par C, l'on décrira un cercle qui paſſera par K, & coupera MG aux points T & H, par où, & par C, l'on menera TC, & HC indéfiniment prolongées au-delà de C par rapport à T & à H: l'on menera enſuite MP & MQ paralleles à CH & à CT; & ayant pris AB moyenne proportionnelle entre CT & CP; CD, moyenne proportionnelle entre CH & CQ, fait $CA = CB$, & $CE = CD$. Je dis que l'Ellipſe dont AB & AD (qui à cauſe du cercle ſe coupent à angles droits) ſont les axes, paſſera par les points M, F, V & S. FIG. 59.

DE'MONSTRATION.

AYANT abaiſſé du centre G ſur CT la perpendiculaire GN, le point N diviſera CT par le milieu en N; &

partant $NG = \frac{1}{2} CH$, & ayant abaiſſé du point S ſur la même CT la perpendiculaire SI, & nommé les données CB, ou CA, a; CD, ou CE, b; CM ou CV, d; CF, ou CS, f; & les indéterminées CP, ou QM, x; PM, ou CQ, y; & CI, z; l'on aura (Conſt.)

$CP(x).CB(a)::CB(a).CT=\frac{aa}{x}$, &

$CQ(y).CD(b)::CD(b).CH=\frac{bb}{y}$; donc $NT=\frac{aa}{2x}$, $NG=\frac{bb}{2y}$, $TP=\frac{aa}{x}-x$, & $QH=\frac{bb}{y}-y$, & les triangles ſemblables CIS, MQH, TPM donneront $CI(z).CS(f)::MQ(x).MH=\frac{fx}{z}$, & $CI(z).CS(f)::TP\left(\frac{aa}{x}-x\right).TM=\frac{aaf}{2x}-\frac{fx}{2}$; donc $HM+MT$, ou $HT=\frac{aaf}{2x}$; & partant $GT=\frac{aaf}{2xx}$; donc à cauſe de l'angle droit GNT, $\frac{a^4ff}{4xxxx}(GT^2)=\frac{a^4}{4xx}+\frac{b^4}{4yy}(NT^2+NG^2)$, d'où l'on tire $ff=zz+\frac{b^4zzxx}{a^4yy}$. Mais l'on a auſſi $MQ(x).QH\left(\frac{bb}{y}-y\right)::CI(z).IS=\frac{bbz}{xy}-\frac{zy}{x}$; donc à cauſe de l'angle droit CIS, $ff(CS^2)=zz+\frac{b^4zz}{xxyy}-\frac{2bbzz}{xx}+\frac{zzyy}{xx}(CI^2+IS)$; donc $zz+\frac{b^4zzxx}{a^4yy}=zz+\frac{b^4zz}{xxyy}-\frac{2bbzz}{xx}+\frac{zzyy}{xx}$, d'où l'on tire $aa-xx=\frac{aayy}{bb}$ qui eſt une équation à une Ellipſe dont les axes ſont (Prop. 1) $AB=2a$, & $DE=2b$, & qui prouve au moins que cette Ellipſe paſſe par les points M, & V; puiſque (Hyp.) $CM=CV$.

Or (Conſt.) $CM(d).CS(f)::CS(f).MK=\frac{ff}{d}$:

mais par la proprieté du cercle $\frac{aaffx}{zzz} - \frac{ffxx}{zz}$ ($HM \times MT = CM \times MK =$ Conſt. CS^2) $= ff$, d'où l'on tire $zz = aa - xx$; c'eſt pourquoi (n°. 18) l'Ellipſe paſſe auſſi par les points S & F. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

36. SI $MV = FS$; CM ſera $= MK$; & partant les points O & G ſe confondront avec le point M, qui ſera le centre du cercle qui étant décrit par C déterminera la poſition des axes par ſa rencontre avec HT en H & en T, qu'on déterminera comme on vient de faire.

PROPOSITION XIV.

Problême.

UNE équation à l'Ellipſe $ab - xx = \frac{cyy}{d}$ *étant donnée, décrire l'Ellipſe, lorſque les coordonnées font un angle oblique.*

On déterminera la grandeur des diametres conjuguez par la Prop 6. on trouvera les axes par la Propoſition précedente ; on déterminera les foyers par la troiſiéme, & on décrira l'Ellipſe par la premiere.

SECTION VII.

Où l'on démontre les principales proprietez de l'Hyperbole décrite par des points trouvez ſur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 60. XIV. *UN angle quelconque* HCK, *& un point quelconque D dans cet angle, étant donnez de poſition ſur un Plan. Si l'on mene librement par le point* D *une ligne* IDK *qui rencontre* CH *&* CK *en* I *& en* K, *& qu'on prenne ſur* IDK *la partie* KO = ID. *Je dis que les points* O *&* D, *& tous ceux que l'on trouvera comme on vient de faire le point* O, *en menant d'autres lignes par le point* D, *ſeront à une Hyperbole, dont* CH *&* CK *ſont les aſymptotes.*

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par les points *D* & *O*, les lignes *DL*, *OG* paralleles à *CK*, & *DN*, *OF* paralleles à *CH*, & nommé les données *DL*, ou *CN*, ou (Conſt.) *FK*, *c*; *DN*, ou *LC*, *d*; & les indéterminées *CF*, ou *GO*, *ſ*; *FO*, ou *CG* ou *NR*, *z*; *NF* ou *RO* ſera *ſ* — *c*, & *DR*, *d* — *z*; les triangles ſemblables *DRO*, *OFK* donneront *d* — *z* (*DR*). *ſ* — *c* (*RO*) :: *z* (*OF*). *c* (*FK*); donc *cd* — *cz* = *ſz* — *cz*, ou *cd* = *ſz*. Et comme cette équation eſt la même que celle qu'on a trouvée (art. 9, n° 16), il ſuit que la courbe décrite comme on vient de dire, eſt une Hyperbole. Et parceque *ſ* croiſſant, *z* diminue, ou au contraire, & qu'on peut augmenter *ſ* à l'infini, *z* diminuera auſſi à l'infini; c'eſt pourquoi les lignes *CH*, & *CK*

ſont les aſymptotes, parcequ'elles ne peuvent jamais rencontrer l'Hyperbole. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

1. IL eſt clair que tous les rectangles ſemblables à $CF \times FO$ ſont égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont toujours égaux au même rectangle $CL \times LD$; & que l'on a toujours $fz = cd$.

COROLLAIRE II.

2. SI l'on prend ſur l'Hyperbole un point quelconque B, & que l'on mene par B une ligne quelconque $TBVS$ qui rencontre l'Hyperbole en un autre point V, & les aſymptotes en T & en S, TB ſera toujours égale à VS : car ayant mené BX & VQ paralleles aux aſymptotes, l'on aura (Corol. 1) $CX \times XB = CQ \times QV$, ou (en nommant CX, c; XB, d; CQ, f; QV, z;) $fz = cd$, ou $fz - cz = cd - cz$, qui étant changée en analogie, donne $d - z . f - c :: z . c$, d'où il ſuit par la Démonſtration de cette Propoſition que $XB = QS$; donc $TB = VS$.

COROLLAIRE III.

3. IL eſt clair que les parallelogrammes CD, CB, CO, CV ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV.

4. SI l'on avoit nommé NF, ou RO, f, l'on auroit eu $fz = cd - cz$, qui montre que lorſqu'une équation à l'Hyperbole renferme plus de deux termes, les indéterminées n'ont point leur origine au ſommet de l'angle des aſymptotes.

COROLLAIRE V.

5. IL eſt évident que lorſqu'on décrit une Hyperbole par un point fixe, comme D, les points O que l'on trouve en faiſant $KO = DI$ peuvent ſervir à en trouver d'autres

comme B, & B à en trouver d'autres comme V, *&c.*

PROPOSITION II.

Theorême.

6. *EN ſuppoſant les mêmes choſes que dans la premiere Propoſition, ſi l'on mene par le ſommet* C *de l'angle des aſymptotes une ligne quelconque* CM *qui rencontre* OG *&* DL, *prolongées ou non prolongées en* P *& en* M. *Je dis que le rectangle* CM × CN, *ou* CM × LD *eſt égal au rectangle* CP × CF, *ou* CP × GO.

Ayant nommé les données CL, d; CN, c; CM, a, & les indéterminées CF, ou GO, $ſ$; CG, ou FO, ζ; CP, u.

Il faut prouver que $ac = uſ$.

DE'MONSTRATION.

A Cauſe des triangles ſemblables CLM, CGP, l'on a $CL . CM :: CG . CP$, ou en termes algebriques $d . a :: \zeta . u$; donc $du = a\zeta$: mais (Prop. 1) $ſ\zeta = cd$, d'où l'on tire $\zeta = \frac{cd}{ſ}$; mettant donc cette valeur de ζ dans l'équation précedente, l'on aura $ſu = ac$. *C. Q. F. D.*

On peut encore démontrer cette Propoſition en cette ſorte. A cauſe des paralleles DM, OP, l'on a $CL . CG :: CM . CP$; c'eſt pourquoi en mettant dans l'équation de la Propoſition précedente $ſ\zeta = cd$, en la place de d (CL) & de ζ (CG) leurs proportionnelles a (CM) & u (CP), l'on aura $ſu = ac$.

PROPOSITION III.

Problême.

FIG. 61. 7. *UNE Hyperbole* MBm, *dont les aſymptotes ſont* CT, *&* CH, *étant donnée. Il faut d'un point quelconque* B, *donné ſur l'Hyperbole, mener une tangente* HBT.

Ayant mené par B les droites BG & BI paralleles

aux aſymptotes, ſoit priſe $IT = CI$. Je dis que la ligne TBH menée du point T par B touchera l'Hyperbole en B, & ne la rencontrera en aucun autre point.

DE'MONSTRATION.

PAR l'Hypotheſe; TBH rencontre l'Hyperbole en B; & parceque $CI = IT$, TB ſera auſſi $= BH$; d'où il ſuit que BTH ne rencontre l'Hyperbole qu'en un ſeul point B : car ſi elle la rencontroit en un autre point O; HO (n° 2) $= BT$ ſeroit $= BH$. Ce qui eſt impoſſible; c'eſt pourquoi TBH touche l'Hyperbole en B. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

8. IL eſt clair que toutes les tangentes, comme TBH terminées par les aſymptotes en T & H, ſont diviſées en deux également par le point touchant B.

COROLLAIRE II.

9. IL ſuit auſſi que ſi la poſition de la tangente TBH, eſt telle que la ligne menée de l'angle C des aſymptotes au point touchant B, diviſe cet angle en deux également, les angles CBH, CBT ſeront droits, & au contraire : car puiſque les angles BCG, BCI ſont égaux; le parallelogramme GI ſera un rombe; & partant $CI = CG$; donc CT (n° 6) double de $CI = CH$ double de CG; c'eſt pourquoi les angles CBH, CBT ſont droits.

COROLLAIRE III.

10. IL ſuit encore que ſi l'angle des aſymptotes HCT eſt droit, dans toutes les Poſitions de la tangente TBH, la ligne CB menée de l'angle des aſymptotes au point touchant B ſera $= BH = BT$; ſi cet angle eſt aigu, CB ſurpaſſera BH, ou BT; s'il eſt obtus CB ſera moindre que BH, ou BT : car ſi du centre B milieu de HT l'on décrit un demi cercle ſur le diametre HT, le point C ſera ſur la circonference ſi l'angle HCT eſt droit; hors du demi cercle, s'il eſt aigu; & dans le demi cercle, s'il eſt

obtus ; donc au premier cas $CB = BH$ ou BT ; au ſecond, CB ſurpaſſe BH, ou BT ; & au troiſiéme, elle eſt moindre.

COROLLAIRE IV.

11. IL eſt encore manifeſte que les lignes LK, Mm paralleles à la tangente HBT ſont coupées par le milieu en P par la droite CB prolongée, car puiſque $BH = BT$, PL ſera $= PK$: mais (n° 2) $ML = mK$; donc $PM = Pm$.

PROPOSITION IV.

Problême.

12. *UNE équation à l'Hyperbole* $xy = aa$ *étant donnée, décrire l'Hyperbole.*

On voit par l'équation, qui n'a que deux termes, que que l'origine des indéterminées x, & y eſt au ſommet de l'angle des aſymptotes.

Soit C l'origine des indéterminées x, qui va vers T, & y qui va vers H, & ayant pris CI & CG chacune $= a$, on achevera le parallelogramme $CGBI$: & l'on décrira (Prop. 1.) l'Hyperbole MBm, entre les aſymptotes CT & CH.

DÉMONSTRATION.

ELLE eſt évidente par la premiere Propoſition.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 61. 13. *SOIT une Hyperbole* MBm *dont* CH *&* CT *ſont les aſymptotes ; ſoit auſſi par un point quelconque* B, *menée* (n°. 7) *une tangente* HBT, *& du point* C *par le point touchant* B *la ligne* CBP. *Si par quelque point* P, *l'on mene* PM *parallele à* HT, *qui rencontre l'Hyperbole aux points* M *& m, & les aſymptotes en* L *&* K. *Je dis que* $CP^2 - CB^2 . PM^2 :: CB^2 . BH^2$, *ou ce qui revient au même, ayant prolongé* BC *en* A, *& fait* CA = CB, *que* $AP \times PB . PM^2 :: AB^2 . TH^2$.

Ayant

Ayant mené BI, BG, mQ & mN paralleles aux aſymptotes, & nommé les données AC, ou CB, a; BH, ou BT, b; CI, ou GB, c; CG, ou IB, d; & les indéterminées CP, x; PM, ou Pm, y; CQ, ou Nm, $ſ$; CN ou Qm, z; AP ſera $x+a$, & BP, $x-a$.

Il faut prouver que $xx-aa.yy::aa.bb::4aa.4bb$.

DÉMONSTRATION.

Les triangles ſemblables CBT, CPK donnent $CB(a).BT(b)::CP(x).PK=\frac{bx}{a}$; donc $mK=\frac{bx}{a}-y$, $mL=\frac{bx}{a}+y$; & à cauſe des triangles ſemblables TBI, KmQ, & BHG, mLN, l'on a $b(TB).d(BI)::\frac{bx}{a}-y(Km).z(mQ)$, & $b(BH).c(BG)::\frac{bx}{a}+y(mL).ſ.(mN)$, d'où l'on tire ces deux équations $bz=\frac{bdx}{a}-dy$, & $bſ=\frac{bcx}{a}+cy$, & en multipliant le premier membre de l'une par le premier de l'autre, & le ſecond par le ſecond, l'on a $bbſz=\frac{bbcdxx}{aa}-cdyy$: mais par la premiere Propoſition $ſz=cd$; donc $bb=\frac{bbxx}{aa}-yy$, en diviſant par les quantitez égales $ſz$, & cd; d'où l'on tire $xx-aa=\frac{aayy}{bb}$; donc $xx-aa.yy::aa.bb::4aa.4bb$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

14. Il eſt évident (art. 9 n° 7, 11, & 12), & par cette équation $xx-aa=\frac{aayy}{bb}$, qui eſt la même que celle du même article n°. 11, que le point C, eſt le centre de l'Hyperbole MBm, que AB eſt l'axe, ſi l'angle CBH

eſt droit; autrement AB eſt nommée diametre déterminé; que DE parallele & égale à HT eſt l'axe, ou le diametre conjugué à AB, que MP & MF ſont les ordonnées ou appliquées aux diametres conjuguez AB & DE. De ſorte que FP eſt le parallelogramme des coordonnées.

FIG. 62.

COROLLAIRE II.

FIG. 62. 15. L'ÉQUATION precedente $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ donne $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{bb + yy}$, qui fait voir que ſi l'on prolonge MF en N; en ſorte que $FN = FM$, le point N ſera à l'Hyperbole; & ſi l'on fait $y = 0$, la ligne MN ſe confondra avec la ligne AB, le point F avec le point C, & l'on aura $x = \pm a$, d'où il ſuit que le point M ſe confond avec le point B, & le point N avec A; de ſorte que $CA = CB$, & que le point A ſera à l'Hyperbole.

Si dans la même équation on fait $x = 0$, ayant mené NQ parallele à DE, ou à PM, les points P & Q ſe confondront avec le point C, & l'on aura $y = \pm\sqrt{-bb}$. Or parceque les valeurs de y ſont imaginaires; il ſuit que l'Hyperbole ne rencontre point le diametre DE, ni de côté ni d'autre du point C. Et parceque l'on tire auſſi de la même équation $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{xx - aa}$; il ſuit que l'Hyperbole rencontre les paralleles MPm, NQn des deux côtez de AB, tant que x (CP, ou CQ) ſurpaſſe a (CB ou CA); qu'elle coupe AB en B & A, lorſque $CP = CB$, ou $x = a$: car $xx - aa$ devient $aa - aa = 0$; & par conſequent $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{xx - aa} = 0$; & que lorſque les points P & Q tombent entre A & B, c'eſt-à-dire, lorſque a ſurpaſſe x, l'Hyperbole ne rencontre point les paralleles à DE menées entre A & B: car la quantité $xx - aa$ devient negative, & par conſequent les valeurs de $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{xx - aa}$ deviennent imaginaires. Enfin l'é-

quation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, fait voir que x (CP, ou CQ) croiſſant, y (PM, ou QN) croît auſſi ; c'eſt pourquoi l'Hyperbole s'éloigne de plus en plus à l'infini du diametre AB prolongé de part & d'autre à l'infini : car il n'y a rien dans l'équation qui empêche d'augmenter x à l'infini, d'où l'on voit que l'Hyperbole a deux parties MBm & NAn oppoſées l'une à l'autre, qui ne ſe rencontre point, & s'étendent à l'infini. Ce ſont ces deux parties de l'hyperbole que l'on appelle *Hyperboles oppoſées*.

COROLLAIRE III.

16. IL eſt clair que les Hyperboles oppoſées ſont égales & ſemblables ; puiſque les coordonnées NF, NQ de l'une ſont égales aux coordonnées MF, MP de l'autre.

COROLLAIRE IV.

17. IL eſt auſſi manifeſte que les aſymptotes CH, Ct de l'Hyperbole MBm, étant prolongées vers g, & vers k, ſont auſſi les aſymptotes de l'Hyperbole oppoſée NAn ; puiſque Nk & ng, ſont toujours égales à mK & ML.

COROLLAIRE V.

18. IL eſt encore évident que la ligne hAt menée par le point A parallele à DE, ou HT ; & qui rencontre les aſymptotes en h & t, eſt égale à HT, ou à DE, & qu'elle touche l'Hyperbole NAn en A ; puiſqu'elle eſt diviſée en deux également en A, comme HT l'eſt en B, & que $CA = CB$.

COROLLAIRE VI.

19. LON a (n° 12) $ML = \frac{bx}{a} - y$, & $MK = \frac{bx}{a} + y$, l'on a auſſi (n°. 13) $bb = \frac{bb \cdot x}{aa} - yy = \frac{bx}{a} - y \times \frac{bx}{a} + y$, qui montre que BH^2 (bb) $= KM \times ML$.

COROLLAIRE VII.

20. L'ON tire de l'équation à l'Hyperbole $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ cette autre équation $aa = xx - \frac{aayy}{bb} = x - \frac{ay}{b} \times x + \frac{ay}{b}$: mais $GM = x - \frac{ay}{b}$, & $GO = x + \frac{ay}{a}$: car les triangles ſemblables HBC, CFG donnent $HB\,(b) . BC\,(a) :: CF$ ou $PM\,(y)\ FG = \frac{ay}{b}$; & partant $GM = FM - FG = x - \frac{ay}{b}$, & $MO = x + \frac{ay}{b}$; d'où il ſuit que $OM \times MG\left(xx - \frac{aayy}{bb}\right) = CB^2\,(aa)$.

DE'FINITION.

21. SI l'on décrit (Prop. 1) dans les angles HCt, TCh par les extremitez D & E du diametre DE conjugué au diametre AB, les Hyperboles oppoſées RDS, $rEſ$, ces Hyperboles ſeront nommées *conjuguées* aux Hyperboles oppoſées MBm, NAn.

COROLLAIRE VIII.

22. IL eſt clair que les lignes Ht, Th paſſeront par les points D & E, & qu'elles toucheront en ces points les Hyperboles RDS, $rEſ$, puiſqu'elles y ſont diviſées par le milieu, comme AB, à qui elles ſont paralleles & égales, l'eſt en C.

COROLLAIRE IX.

23. D'où il ſuit que DE & AB ſont les axes conjuguez des Hyperboles RDS, $rEſ$, ſi DE eſt perpendiculaire à AB; autrement, elles en ſont deux diametres conjuguez.

AVERTISSEMENT.

24. *IL n'eſt point neceſſaire de démontrer que les Hyperboles* RDS, rEſ, *ont les mêmes proprietez que les Hy-*

perboles MBm, NAn ; *puiſque ce ne ſeroit qu'une repetition inutile.*

DE'FINITION.

25. SI l'on fait $a . b :: 2b . \frac{2bb}{a}$ que je nomme p, la ligne égale à p, eſt appellée *le parametre* du diametre AB.

COROLLAIRE X.

26. $a . b :: 2b . p$, donne $ap = 2bb$, ou $aap = 2abb$; d'où l'on tire $\frac{2a}{p} = \frac{aa}{bb}$; c'eſt pourquoi, ſi dans l'équation à l'Hyperbole $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; au lieu de $\frac{aa}{bb}$, l'on met ſa valeur $\frac{2ay}{p}$, l'on aura $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$, d'où l'on tire $xx - aa . yy :: 2a . p$, & ſi l'on met en la place de $\frac{aa}{bb}$ un autre rapport égal $\frac{m}{n}$, l'on aura $xx - aa = \frac{myy}{n}$. On ajoutera à ce Corollaire ce qu'on a dit (art. 12 n° 9, 10, 11, & 12.

COROLLAIRE XI.

27. SI l'on avoit nommé (n°. 12) BP, x ; AP auroit été $2a + x$, & l'on auroit trouvé cette équation $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$, qui montre que lorſque les indéterminées n'ont point leur origine au centre de l'Hyperbole, il ſe trouve des ſeconds termes dans ſon équation.

COROLLAIRE XII.

28. SI dans l'équation à l'Hyperbole $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ ou $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$, a eſt $= b$, ces deux équations deviendront les deux ſuivantes $xx - aa = yy$, & $2ax + xx = yy$, c'eſt-à-dire, qu'alors $AP \times PB = PM^2$; les diametres conjuguez AB, DE ſeront égaux ; (n° 9)

les aſymptotes à angles droits ; & tous les diametres égaux à leurs parametres.

L'on remarquera que ces deux équations à l'Hyperbole ne different de celle du cercle, & les deux premieres de celle de l'Ellipſe, qu'en ce que les deux quarrez inconnus, ont un même ſigne lorſque l'un eſt dans un membre de l'équation, & l'autre dans l'autre, ou differens ſignes, lorſqu'ils ſont tous deux dans un même membre, & c'eſt le contraire dans celles du cercle, & de l'Ellipſe, comme on a remarqué (art. 12 n° 13) ; d'où l'on conclura qu'une équation locale appartiendra toujours à l'Hyperbole, quelque mêlange de conſtantes qu'il s'y puiſſe rencontrer, lorſque les quarrez des deux lettres indéterminées auront un même ſigne, l'un étant dans un membre de l'équation & l'autre dans l'autre, ou des ſignes differens, étant tous deux dans le même membre ; & ſouvent même lorſque les indéterminées s'y trouveront multipliées l'une par l'autre. Je dis ſouvent car il y a des exceptions à faire qu'on trouvera dans la ſuite.

DE'FINITION.

29. L'HYPERBOLE qui a ſes aſymptotes à angles droits, ou (n°. 9) ce qui revient au même, dont les diametres ſont égaux entr'eux & à leurs parametres, eſt appellée *Hyperbole équilatere* ; parceque l'axe d'une Section conique eſt appellé par Apollonius, *latus tranſverſum*, & ſon parametre, *latus rectum*.

PROPOSITION VI.

30. *UNE équation à l'Hyperbole* $xx + cc - dd = \frac{nyy}{n}$, *étant donnée, décrire l'Hyperbole.*

FIG. 62. Soit C l'origine des inconnues x qui va vers P, & y qui va vers F, & qui font un angle quelconque FCP, le point C ſera auſſi le centre de l'hyperbole ; puiſqu'il n'y a point de ſecond terme dans l'équation. En ſuppoſant

1°. Que d ſurpaſſe c ; ſoit $ff = dd - cc$, & mettant dans l'équation en la place de $dd - cc$ ſa valeur ff, elle deviendra $xx - ff = \frac{myy}{n}$. Soit pris $CB = f$; CB ſera (n° 13) le demi diametre de l'hyperbole qu'il faut décrire. Soit fait $m . n :: ff . \frac{nff}{m}$; $\sqrt{\frac{nff}{m}}$ ſera (art. 12 n°. 12) le demi-diametre conjugué CD. Ayant mené par B la ligne HBT paralle à CD, & fait BH & BT chacune égale à $\sqrt{\frac{nff}{m}}$; $= CD$; l'on menera les lignes CHL, CTK du centre C par les points H & T qui ſeront (n° 13) les aſymptotes, & l'on décrira l'hyperbole (Prop. 1) par le point B.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt évidente par les art. & n°. que l'on vient de citer.

3°. En ſuppoſant 2°. Que c ſurpaſſe d, ſoit fait $gg = cc - dd$, & mettant dans l'équation en la place de $cc - dd$ ſa valeur gg, l'on aura $xx + gg = \frac{myy}{n}$: mais parce que cette équation n'exprime point dans l'état où elle eſt, la proprieté de l'hyperbole démontrée (n°. 13) ou dans la Prop. 5 : car $xx + gg$ n'eſt point égal à $AP \times PB$; il faut la changer en celle-ci $\frac{mxn}{m} = yy - \frac{ngg}{m}$ en multipliant par n, diviſant par m, & tranſpoſant, qui montre que le demi-diam. exprimé par $\sqrt{\frac{ngg}{m}}$ doit être pris ſur CF exprimé par y. Ayant donc pris $CD = \sqrt{\frac{ngg}{m}}$; & fait $n . m :: \frac{ngg}{m} . gg$, g ſera le demi diametre conjugué à CD ; ſi l'on mene preſentement par D la ligne tDH parallele à CB, & qu'on faſſe tD & DH chacune $= g$; les lignes menées du centre C par t & par H, ſeront les aſymptotes ; & l'on décrira l'hyperbole par le point D.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt la même que la précedente.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 63. 31. UNE *Hyperbole* BM, *dont* C *eſt le centre*; AB *&* DE *les deux axes, ou deux diametres conjuguez quelconques*; & CH, CT, *les aſymptotes. Si l'on mene* (*n°. 6*) *par un point quelconque* M *autre que* B *la tangente* EMF, *qui rencontre les aſymptotes en* E *&* F. *Je dis qu'elle rencontrera le diametre* AB *en un point* L, *qui ſera ſitué entre le centre* C, *& l'extremité* B *du même diametre* AB; *& que* CP . CB :: CB . CL.

Ayant mené par *M* les droites *PMK* parallele à *DE*, ou *HT*; *MO*, parallele à *CB*; *MI*, parallele à *CH*, & par le point *B*, les droites *BG*, *BN* paralleles aux aſymptotes *CT*, *CH*, & nommé les données & conſtantes *CB*, ou *CA*, *a*; *CD*, ou *BH*, ou *BT*, *b*; *BG*, ou *CN*, *c*; *BN*, ou *CG*, *d*; & les indéterminées *CP*, *x*; *PM*, *y*; *CI*, ou (*n°. 6*) *IE*, *f*; *MI*, *z*; & *CL*, *t*.

Il faut prouver que *x* . *a* :: *a* . *t*.

DE'MONSTRATION.

LES triangles ſemblables *CBT*, *CPK* donnent *CB* (*a*) . *BT* (*b*) :: *CP* (*x*) . $PK = \frac{bx}{a}$; donc $MK = \frac{bx}{a} - y$. Les triangles ſemblables *TBN*, *KMI*, donnent *b* (*TB*) . *d* (*BN*) :: $\frac{bx}{a} - y$ (*KM*) . *z* (*MI*), d'où l'on tire $z = \frac{bdx - ady}{ab}$. Les triangles ſemblables *BNC*, *MIO* donnent *BN* (*d*) . *NC* (*c*) :: *MI* (*z*) . $IO = \frac{cz}{d}$; donc $EO = EI + IO = f + \frac{cz}{d}$; & *BN* (*d*) . *BC* (*a*) :: *MI* (*z*) . *MO*

$= \frac{aaz}{d}$. Enfin les triangles ſemblables EOM, ECL donnent $f + \frac{cz}{d}(EO) . \frac{az}{d}(OM) :: 2f(EC) . t(CL)$, d'où l'on tire $t = \frac{2afz}{df + cz}$: mais (Prop. 1). $fz = cd$, & $f = \frac{cd}{z}$, c'eſt pourquoi en mettant ces valeurs de f & de fz dans celle de t, l'on aura $t = \frac{2adz}{dd + zz}$. Or l'on vient de trouver $z = \frac{bdx - ady}{ab}$; mettant donc cette valeur de z, & celle de ſon quarré dans la précedente valeur de t, l'on aura aprés les réductions $t = \frac{2aabbx - 2a^3by}{aabb + bbxx - 2abxy + aayy}$: mais (Prop. 5) $aayy = bbxx - aabb$; c'eſt pourquoi en mettant cette valeur de $aayy$ dans la derniere de t, l'on aura aprés les réductions, $t = \frac{aa}{x}$; d'où l'on tire $x . a :: a . t$, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

32. IL eſt clair qu'on peut par ce moyen, d'un point quelconque donné ſur l'Hyperbole, mener une tangente ſans le ſecours des aſymptotes, en prenant CL troiſiéme proportionnelle à CP & à CB.

COROLLAIRE II.

33. SI de CP (x) l'on ôte $CL\left(\frac{aa}{x}\right)$, l'on aura $PL = \frac{xx - aa}{x}$ pour l'expreſſion de la ſoutangente PL.

COROLLAIRE III.

34. SI de CB (a) l'on ôte $CL\left(\frac{aa}{x}\right)$, l'on aura $BE = \frac{ax - aa}{x}$, ou ſi l'on ſuppoſe que CP (x) devienne infiniment grande, le point touchant M ſera infiniment

éloigné de B; & effaçant le terme $-aa$ dans l'expreſſion de BL; parcequ'alors il devient nul par rapport à ax; l'on aura $BL = \frac{ax}{x} = a$; d'où il ſuit que le point L tombe en C, & la tangente LM devient CE qui eſt l'aſymptote de l'Hyperbole.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

FIG. 64. 35. *UNE Hyperbole* BM, *dont* C *eſt le centre*; AB & DE, *les axes conjuguez, étant donnée*; *ſi l'on fait* CF & CG *chacune égale à l'intervalle* BD, *ou* BE, & *que l'on mene d'un point quelconque* M, *pris ſur l'Hyperbole, les droites* MF, MG; & (n°. 32) *la tangente* ML. *Je dis que l'angle* LMF *ſera égal à l'angle* LMG.

Ayant mené l'appliquée MP perpendiculaire à l'axe AB, & nommé CB, ou CA, a; CD, ou CE, b; CF, ou CG, ou BD, c; MF, z; MG, f; CP, x; PM, y; PF ſera, $x - c$; PG, $x + c$; & CL (n°. 31) $\frac{aa}{x}$; donc $FL = c - \frac{aa}{x}$, ou $\frac{cx - aa}{x}$, & $GL = c + \frac{aa}{x}$, ou $\frac{cx + aa}{x}$.

Il faut prouver que $MF(z) . MG(f) :: FL\left(\frac{cx - aa}{x}\right) ; GL\left(\frac{cx + aa}{x}\right) :: cx - aa . cx + aa$.

DEMONSTRATION.

LES triangles rectangles FPM & GPM donnent
$A.\ xx - 2cx + cc + yy = zz$, &
$B.\ xx + 2cx + cc + yy = ff$: mais (Prop. 4)
$C.\ yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$, & le triangle rectangle BCD donne $bb = cc - aa$, mettant donc cette valeur de bb dans l'équation C, l'on a $yy \frac{ccxx - aaxx - aacc + a^4}{aa}$, & mettant

cette valeur de yy dans les deux équations A, & B, l'on aura aprés les réductions & extractions de racines, $cx - aa = az$, & $cx + aa = af$; donc $cx - aa . cx + aa :: az . af :: z . f$. C. Q. F. D

COROLLAIRE

36. D'où l'on voit que si l'un des points F, ou G étoit un point lumineux, les prolongemens des rayons reflechis à la rencontre de l'Hyperbole se réuniroient à l'autre point G ou F.

DE'FINITION.

37. LES points F & G sont appellez les *foyers* de l'Hyperbole.

SECTION VIII.

Où l'on donne la méthode de réſoudre les Problêmes indéterminez du premier & du ſecond degré, c'eſt-à-dire, de conſtruire les équations à la ligne droite, & aux quatre courbes du premier genre, qui ſont le Cercle, la Parabole, l'Ellipſe & l'Hyperbole.

METHODE.

XV. L'On a vû dans les Sections précedentes 1°. Que les équations indéterminées, où les lettres inconnues ne ſont multipliées ni par elles-mêmes ni entr'elles, appartiennent à la ligne droite, & que lorſque ces équations n'ont que deux termes, comme celle-ci $ay = bx$, ou $x = y$; les inconnues x & y ont leur origine au point d'interſection de deux lignes droites, dont l'une renferme tous ces points qui ſatisfont au Problême, & l'autre, tous les points d'où menant des lignes paralleles à quelque ligne donnée, & terminées par la premiere, ſont la conſtruction du Problême.

2°. Que lorſqu'une équation à la parabole n'a que deux termes, l'un deſquels eſt le quarré de l'une des inconnues, & l'autre, le produit de l'autre inconnue par une quantité connue, comme $ax = yy$; les inconnues x, & y ont leur origine au ſommet de l'axe, ou d'un diametre exprimé par x, & que lorſqu'elle a plus de deux termes, l'origine des inconnues n'eſt point au ſommet d'un diametre.

3°. Que lorſqu'une équation au cercle, ou à l'Ellipſe, ou aux diametres de l'Hyperbole, n'a que trois termes, deux deſquels renferment les quarrez des deux inconnues, &

le troiſiéme eſt entierement connu, comme $aa - xx = yy$, $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, ou $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, les inconnues x & y ont leur origine au centre de ces trois Courbes, & que lorſque ces équations ont des ſeconds termes, l'origine des inconnues n'eſt point au centre.

4°. Que lorſqu'une équation aux aſymptotes d'une Hyperbole n'a que deux termes dont l'un eſt le produit des deux indéterminées, & l'autre un Plan connu comme $xy = ab$, l'origine des inconnues x & y eſt au ſommet de l'angle des aſymptotes, & que lorſque cette équation a plus de deux termes, l'origine des inconnues eſt ailleurs; où l'on remarquera que les quantitez conſtantes, quelques compoſées qu'elles ſe puiſſent rencontrer, changent rien de ce que nous venons de dire; puiſque l'on peut toujours mettre en leur place des valeurs ſimples: par exemple cette équation $\frac{a^4 - b^4}{cc} - xx = yy$, eſt une équation au cercle dont le centre eſt l'origine des indéterminées: car on peut trouver (art. 5) une quantité ſimple $dd = \frac{a^4 - b^4}{cc}$; de ſorte que mettant dd dans l'équation precedente en la place de $\frac{a^4 - b^4}{cc}$ elle deviendra $dd - xx = yy$. Il en eſt ainſi des autres.

Nous avons donné dans les Sections precedentes la maniere de conſtruire les équations indéterminées du ſecond degré, c'eſt à dire, de décrire les quatre courbes du premier genre par le moyen de leurs équations: mais ces équations étoient dans l'état où nous les venons de propoſer; c'eſt-à-dire que l'équation à la ligne droite, à la parabole, & aux aſymptotes de l'Hyperbole, n'avoit que deux termes; l'équation au cercle, à l'Ellipſe, & aux diametres de l'Hyperbole, n'avoient que trois termes parmi leſquels il n'y en avoit point de ſecond: mais lorſqu'on réſout un Problême, les équations où l'on arrive ne ſont pas toujours, ou plûtôt, ſont rarement dans cet

état. Ce qu'il y a de conſtant, c'eſt que lorſque les lettres indéterminées n'auront pas plus de deux dimenſions, ſoit qu'elles ſoient multipliées par elles mêmes, ou entr'elles, les équations appartiendront toujours à une des quatre Courbes du premier genre. Il eſt même tres-ſouvent facile de reconnoitre par la ſeule inſpection d'une équation à laquelle des quatre elle appartient, par ce que l'on a dit ailleurs, & il n'y a qu'un Cas où l'on puiſſe ſe méprendre, qui eſt lorſqu'une équation renferme deux quarrez inconnus, & que le produit des deux lettres inconnues ſe rencontre encore dans quelqu'un de ſes termes : car ces équations appartiennent ſouvent à l'hyperbole, & quelquefois au cercle, ou à la parabole, ou à l'Ellipſe : mais lorſqu'il n'y a qu'un quarré inconnu, & que le produit des deux inconnues ſe trouve dans un autre terme, l'équation appartiendra toujours à l'hyperbole, & il ſera libre de la réduire aux diametres, ou aux aſymptotes, comme on va bien-tôt voir.

Il ſuit de tout ceci que pour conſtruire les équations qui ne ſont point dans l'état des précedentes, c'eſt-à-dire, pour décrire les Courbes auſquelles elles appartiennent, ou il faut donner d'autres regles que celles des trois Sections précedentes, ou il faut donner des regles pour ramener ces équations à l'état où ſont celles des mêmes Sections, afin de ſe ſervir des mêmes regles dont on s'y eſt ſervi pour décrire ces Courbes : mais comme il va paroître un Livre de Monſieur le Marquis de l'Hôpital (pour l'intelligence duquel celui-ci ne ſera peut-être pas inutile) dans lequel on trouvera des Méthodes de conſtruire les équations indéterminées, telles qu'on les trouve en reſolvant les Problêmes, on a jugé à propos de prendre le parti de ramener les équations indéterminées qui n'excedent point le deuxiéme degré, à l'état de celles par le moyen deſquelles nous avons décrit les Sections coniques dans les trois Sections précedentes. Les moyens dont on ſe ſert pour changer d'état ces équations, ſont nommées *réductions*.

DES REDUCTIONS

Des Equations indéterminées du premier & du ſecond degré.

1. Il n'y a que deux choſes qui empêchent les équations indéterminées du ſecond degré, d'être ſemblables, ou dans le même état de celles par le moyen deſquelles nous avons décrit les Courbes auſquelles elles appartiennent dans les trois Sections précedentes. Ces deux choſes ſont les ſeconds termes, & les rectangles compoſez; de ſorte que pour les réduire, il n'y a qu'à faire évanouir par les regles ordinaires les ſeconds termes, & changer les rectangles, ou produits compoſez en des rectangles, ou des produits ſimples.

J'appelle rectangle compoſé, le produit d'une lettre ou quantité connue, ou inconnue, par une lettre inconnue accompagnée par addition, ou ſouſtraction d'une autre lettre ou quantité connue ſimple, ou compoſée. Par exemple $ay \pm xy$, eſt un rectangle compoſé de $a \pm x \times y$; $aa \pm ay$, eſt un rectangle compoſé $a \pm y \times a$; $\frac{aax \pm axy}{b}$, eſt un rectangle compoſé de $\frac{aa \pm ay}{b} \times x$; $ay \pm by \pm xy$, eſt compoſé de $a \pm b \pm x \times y$. Il eſt ainſi des autres.

2. Il y a quelquefois quelque changement à faire pour rendre des quantitez complexes ſemblables aux rectangles compoſez dont nous venons de parler. Par exemple $aa - by$, n'eſt point le produit d'une quantité ſimple par une quantité complexe: car pour cela, il faudroit qu'il y eut un b dans le premier terme aa; c'eſt pourquoi il faut (art. 5) changer aa en un rectangle dont un côté ſoit b, comme en bc, & mettant bc en la place de aa, l'on aura $bc - by = c - y \times b$. Il en eſt ainſi des autres.

Il y a des équations, où il n'y a qu'à ôter les ſeconds termes pour les réduire: il y en a d'autres où il n'y a qu'à changer les produits compoſez en des produits ſimples, & il y en a d'autres où il y a toutes ces deux choſes à faire. Les exemples ſuivans ne laiſſeront rien à éclaircir ſur ce ſujet.

EXEMPLES.

De la réduction des Equations en faiſant évanouir les ſeconds termes.

3. ON ſçait que la regle de faire évanouir le ſecond terme d'une équation, eſt d'égaler la racine du premier + ou — le coefficient du ſecond diviſé par l'expoſant du premier à une nouvelle inconnue ; ce qui donne une équation que j'appelle *réduction* : d'où l'on tire une valeur de l'inconnue qui eſt la racine du premier terme de l'équation à réduire ; & ſubſtituant cette valeur, & celle de ſes puiſſances dans l'équation à réduire, elle ſe change en une autre équation, où l'inconnue dont on vouloit faire évanouir le ſecond terme, ne ſe trouve plus : mais il ſe trouve en ſa place la nouvelle inconnue de la réduction, dont le premier terme eſt élevé à la même puiſſance que celui de l'inconnue que l'on a fait évanouir, mais qui n'en a point de ſecond. Ceci eſt general pour les équations de tous les degrez, quoiqu'il ne ſoit ici queſtion que des équations du ſecond.

EXEMPLE I.

4. SOIT l'équation $xx - ax + yy = by$. Il eſt clair que cette équation appartient au cercle, puiſqu'elle renferme deux quarrez inconnus xx & yy qui ont le même ſigne + étant tous deux dans un même membre de l'équation : mais les inconnues n'ont point leur origine au centre : car les deux quarrez inconnus xx & yy ont chacun un ſecond terme ax & by. Pour faire évanouir le ſecond terme $-ax$, je fais $x - \frac{1}{2}a = z$; donc $x = z + \frac{1}{2}a$, & mettant cette valeur de x, & celle de ſon quarré dans l'équation, elle deviendra $zz - \frac{1}{4}aa + yy = by$, où zz eſt un premier terme qui n'en a point de ſecond. Pour faire évanouir le ſecond terme by, je le paſſe du côté de ſon premier yy, afin que yy garde ſon ſigne +, ainſi l'équation devient

devient $zz - \frac{1}{4}aa + yy - by = 0$; & faiſant $y - \frac{1}{2}b = u$; l'on a $y = u + \frac{1}{2}b$; & mettant cette valeur de y & celle de ſon quarré dans l'équation en la place de y & de yy, l'on aura $zz - \frac{1}{4}aa + uu - \frac{1}{4}bb = 0$, ou $zz = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - uu$, qui montreroit que cette équation appartient au cercle ſi on ne l'avoit pas connu d'abord, & qui montre que les inconnues z & u ont leur origine au centre ; puiſque ni l'une, ni l'autre n'ont point de ſecond terme. Le demi diametre de ce cercle eſt égal à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$.

EXEMPLE II.

5. SOIT une équation $xx + bx - 2ax - yy = 0$. On voit déja que cette équation eſt à une Hyperbole équilatere ; puiſqu'elle renferme deux quarrez inconnus avec differens ſignes dans un même membre, & délivrez de toute quantité connue ; en faiſant $x + \frac{1}{2}b - a = z$, l'on aura $x = z - \frac{1}{2}b + a$, & aprés les ſubſtitutions l'on aura $zz - \frac{1}{4}bb + ab - aa - yy = 0$, ou $zz - \frac{1}{4}bb + ab - aa = yy$. mais ſi $\frac{1}{2}b$ ſurpaſſe a il faudra tranſpoſer le terme connu ; car en ce cas il eſt poſitif, & dans l'équation à l'Hyperbole il doit être négatif ; ainſi l'équation ſera $zz = yy + \frac{1}{4}bb - ab + aa$, où les inconnues z & y ont leur origine au centre de l'Hyperbole, dont les demi diametres conjuguez ſont égaux entr'eux & à $\frac{1}{2}b - a$, ou $a - \frac{1}{2}b$.

EXEMPLE III.

6. Soit $xx - 2xy + by = o$, qui eſt une équation où il y a un ſecond terme $2xy$ qui peut apartenir indifferemment à deux premiers : mais parceque le quarré de y ne s'y trouve point, il faut neceſſairement le rapporter à xx ; faiſant donc $x - y = z$, l'équation ſe réduira à $zz - yy + by = o$: mais la réduction a fait naître un premier terme yy qui a pour ſecond by ; c'eſt pourquoi en tranſpoſant pour donner à yy le ſigne $+$, l'on a $zz = yy - by$, & faiſant $y - \frac{1}{2}b = s$; l'équation ſe réduira à $zz = ss - \frac{1}{4}bb$, qui eſt une équation à l'Hyperbole équilatere, où les inconnues z & s ont leur origine au centre.

EXEMPLE IV.

7. Soit $xx - 2xy - aa + 2yy = o$, en faiſant $x - y = z$, l'équation ſe réduit à celle-ci $zz - yy - aa + 2yy = o$, ou $zz - aa + yy = o$, qui eſt une équation au cercle, ſi les inconnues z & y font un angle droit ; à l'Ellipſe, s'il eſt oblique.

Si dans l'équation à réduire $xx - 2xy - aa + 2yy$, au lieu de $2yy$, il y avoit $- yy$, ou $- 2yy$ &c, elle appartiendroit à l'Hyperbole dont les diametres ne ſont point égaux ; s'il y avoit $+ 3yy$ ou $+ 4yy$ &c, elle appartiendroit à l'Ellipſe ; & ſi au lieu de $2yy$, il y avoit $\pm by + yy$, elle appartiendroit à la parabole.

EXEMPLES.

Des réductions en changeant les produits compoſez en produits ſimples.

On réduit en changeant les produits compoſez en des produits ſimples, toutes les équations où il n'y a point de quarrez inconnus, qui ſont celles qui appartiennent

à la ligne droite, ou aux asymptotes de l'Hyperbole ; celles où il n'y a qu'un quarré inconnu sans le produit des inconnues, qui appartiennent toutes à la parabole, & celles où il n'y a qu'un quarré inconnu avec un produit des deux inconnues, qui appartiennent toutes à l'Hyperbole. On pourroit aussi réduire ces dernieres, en faisant évanouir le second terme, comme on a fait (n°. 6) auquel cas elles appartiendroient aux diametres de l'Hyperbole : mais en les réduisant en changeant les rectangles composez en de simples, elles se rapporteront aux asymptotes. Toutes ces équations ne seront point entierement réduites par cette seconde maniere de réduction, que lorsqu'elles ne renfermeront que deux termes.

EXEMPLE V.

8. SOIT l'équation, $x+y=a$, ou $x=a-y$, en faisant $a-y=z$, l'on aura $x=z$, qui est un lieu à la ligne droite. Si l'on fait $x+y=z$, l'on aura $z=a$, qui est aussi un lieu à la ligne droite : mais les deux inconnues d'une équation ne se doivent pas trouver dans une réduction quand on peut faire autrement.

Soit l'équation $x-y=a-c$, ou $x=a-c+y$; en faisant $a-c+y=z$, l'on aura $x=z$.

EXEMPLE VI.

9. SOIT l'équation $ax+by=aa$, ou $ax=aa+by$, ou $ax=bc+by$, en mettant bc pour aa, ayant fait $c+y=z$, l'on aura $ax=bz$, qui est un lieu à la ligne droite.

EXEMPLE VII.

10. SOIT l'équation $ax-xy=by$, en faisant $a-y=z$, l'on a $y=a-z$; & mettant cette valeur de y dans l'équation à réduire, l'on aura $xz=ab-bz$ qui a encore trois termes ; c'est pourquoi, en transposant, l'on a $xz+bz=ab$; & faisant $x+b=e$, l'on a $ez=ab$, qui est une équation aux asymptotes de l'Hyperbole.

EXEMPLE VIII.

11. SOIT $abx = bcy + axy$; parceque dans les équations où il n'y a point de quarré inconnu, c'eſt le produit des deux inconnues qui en détermine le degré, il faut, avant que de les réduire, délivrer ce produit de toute quantité connue; c'eſt pourquoi en diviſant toute l'équation par a, l'on aura $bx = \frac{bcy}{a} + xy$, & faiſant $\frac{bc}{a} + x = z$, l'on a $x = z - \frac{bc}{a}$, & mettant cette valeur de x dans l'équation à réduire, l'on aura $bz - \frac{bbc}{a} = zy$, ou $bz - zy = \frac{bbc}{a}$; & faiſant encore $b - y = u$, l'on aura $zu = \frac{bbc}{a}$, qui eſt un lieu aux aſymptotes de l'Hyperbole.

EXEMPLE IX.

12. SOIT l'équation $xx - ax = by$, pour faire évanouir le ſecond terme, on fera $x - \frac{1}{2}a = z$, & l'on aura $zz - \frac{1}{4}aa = by$, ou $zz = \frac{1}{4}aa + by$, ou $zz = bc + by$, en mettant bc pour $\frac{1}{4}aa$, & faiſant encore $c + y = u$, l'on aura $zz = bu$, qui eſt un lieu à la parabole dont le parametre eſt b.

EXEMPLE X.

13. SOIT l'équation $xx \pm xy = ab$. On peut réduire cette équation en faiſant évanouir le ſecond terme, & elle ſe rapportera aux diametres de l'Hyperbole: car faiſant $x \pm \frac{1}{2}y = z$, l'on aura $zz - \frac{1}{4}yy = ab$, ou $zz - ab = \frac{1}{4}yy$. Mais parceque $xx \pm xy = x \times x \pm y$, en

faisant $x + y = z$, l'on aura $zz = ab$ qui se rapporte aux asymptotes.

EXEMPLE XII.

14. SOIT $xx - xy = by$, on pourroit encore réduire cette équation en faisant évanouir les seconds termes, & elles se rapporteroit aux diametres de l'Hyperbole : mais on peut aussi la réduire aux asymptotes comme l'on a fait la precedente : car en transposant, l'on a $xx = by + xy$; & faisant $x + b = z$, l'on a $x = z - b$, & mettant cette valeur de x dans l'équation à réduire, l'on aura $zz - 2bz + bb = zy$, ou $zy + 2bz - zz = bb$, & faisant $y + 2b - z = u$, l'on aura $uz = bb$, qui se rapporte aux asymptotes. Voyez l'article 12. n°. 10.

CONSTRUCTION DES REDUCTIONS.

XVI. EN réduisant les équations indeterminées, l'on en forme d'autres plus simples, que nous avons nommées Réductions. Et comme c'est par le moyen de ces Réductions que l'on construit les premieres, l'on a jugé à propos d'en donner ici la construction en particulier pour avoir plus de facilité à construire les autres.

Toutes les Réductions se peuvent rapporter à quelqu'une des six Formules suivantes, où a, b & c expriment des quantitez connues quelconques complexes, ou incomplexes.

1. $x \pm a = z$.
2. $a - x = z$.
3. $x \pm y = z$.
4. $y \pm \frac{ay}{b} = z$.
5. $x + y + b = z$.
6. $x \pm \frac{by}{c} = z$.

CONSTRUCTION.

De la premiere Formule $x \pm a = z$.

SOIT A le point fixe, ou l'origine des inconnues x, qui va vers H, & y qui va vers G, & qui forment l'angle GAH tel qu'il doit être selon les qualitez du Problême, FIG. 65.

dont on suppose ici que l'on fait la construction. 1°. Si la Réduction est $x + a = z$, il est clair que la construction se doit faire sur la ligne AH exprimée par x, & que pour avoir sur AH indéfiniment prolongée vers H une ligne égale à z, il faut prolonger AH du côté de A en C, en sorte que $AC = a$: car l'on aura alors $CA + AH = a + x = z$; & ainsi le point C sera alors l'origine, ou le commencement de z qui va vers H, & de y qui va vers g, en demeurant toujours parallele à AG, de sorte que s'il n'y avoit point de Réduction pour y, le point C seroit l'origine des inconnues de l'équation réduite, dont celle que l'on vient de construire est une Réduction.

2. Si la Réduction est $x - a = z$, l'on prendra le point
FIG. 66. C du côté de H par rapport à A, & l'on fera $AC = a$; & le point C sera le commencement de z qui va toujours vers H, & de y qui va vers g parallele à AG: car alors $AH - AC = CH = x - a = z$; & s'il n'y avoit point de réduction pour y, le point C seroit l'origine des inconnues de l'équation réduite.

3. Mais si dans l'un ou dans l'autre, ou dans tous les deux Cas précedens, il y a une réduction pour y semblable à la précedente, par exemple, $y + b = u$; l'on fera
FIG. 65. 66. sur Cg ce que l'on vient de faire sur AH, c'est-à-dire, que s'il y a $y + b = u$, on prolongera Cg en O; & s'il y a $y - b = u$, l'on retranchera Co de Cg, en faisant CO, ou $Co = b$; & le point O, ou o sera l'origine des inconnues de l'équation réduite u qui va toujours vers g, & z qui va vers M, ou m parallele à CH; de sorte que les nouvelles inconnues z & u font le même angle au point O, ou o que les premieres x & y au point A, qui est leur origine.

CONSTRUCTION

De la seconde Formule $a - x = z$.

4. L'ON voit par la seule inspection de cette Formule que les deux inconnues x & z sont ensemble égales à la
FIG. 67. grandeur a; c'est pourquoi A étant le commencement

de x qui va vers H, ayant pris sur AH l'intervalle $AC = a$, le point C sera le commencement de z, qui en ce cas va vers A, & de y qui va vers g parallele à AG; car si l'on prend librement un point D sur AC; AD étant x, CD sera $a - x = z$; & le point D n'étant point fixe, ne peut être l'origine de x; c'est pourquoi puisque x a son origine au point A, z commencera necessairement au point fixe C, & ira par consequent vers A.

S'il y a encore une Réduction pour y semblable à une des deux premieres Formules, on la construira comme on a fait les précedentes.

CONSTRUCTION.

De la troisiéme Formule $x + y = z$.

6. TOUTES les Réductions, où se trouvent les deux inconnues x & y de l'équation à réduire, viennent des équations où les mêmes inconnues sont multipliées l'une par l'autre dans quelque terme, & où l'une des deux, ou toutes ces deux sont quarrées. Or pour ne point se trouver embarrassé dans la construction de la Réduction, la lettre inconnue de la Réduction qui est multipliée par l'autre inconnue dans l'équation à réduire, doit être construite la premiere, par exemple, si l'équation à réduire est $xx - xy = ab$; soit qu'on fasse $x - \frac{1}{2}y = z$, pour faire évanouir le second terme, soit qu'on fasse $x - y = z$ pour changer le rectangle composé $xx - xy$, en un simple xx, il faudra toujours construire x la premiere.

Supposons dans cette Formule que y, étoit multipliée par x dans l'équation à réduire, & soit A le point fixe où commencent les inconnues x qui va vers G, & y qui va vers H, & qui fait avec AG un angle quelconque GAH. Si outre la Formule que l'on construit, il y a une réduction pour y, elle sera semblable à une des deux précedentes, c'est-à-dire, qu'elle sera $xy + b = x$, & on la construira com- Fig. 68.

me les précedentes en prenant sur AH, prolongée ou non prolongée selon qu'il y a $y + b$, ou $y - b$, la partie AC, ou $AD = b$, & l'origine de l'inconnue u sera au point C, s'il y a $y + b = u$; au point D, s'il y a $y - b = u$, & ira vers H dans l'un & l'autre cas: mais s'il y a $b - y = u$, le point D sera l'origine de u qui ira vers A. Cela posé,

Si la Réduction est $x + y = z$, l'on prendra sur AD un point quelconque E, par où l'on menera EF parallele à AG, & ayant prolongé EF en B, en sorte que $EB = AE$, l'on menera de A par B la ligne AB indéfiniment prolongée du côté de B, & $BF = BE + EF =$ (Const.) $AE + EF$ sera $= x + y = z$, & le point A sera l'origine des trois inconnues x, y & z. Mais s'il y avoit une Réduction pour y telle que celle qu'on vient de construire, l'origine des inconnues u parallele à AH & ζ parallele à AG, seroit au point O ou P, où la ligne AB rencontreroit la parallele à AG menée par C ou par D; de sorte que les coordonnées de la courbe qu'il faut décrire sont à present AB & BF, ou OB & BF, ou PB & BF.

Si la Réduction croît $x - y = z$, les points B, O & P seroient de l'autre côté de AH.

CONSTRUCTION.

De la quatrième Formule $x \pm \frac{ay}{b} = z$.

7. Elle est la même que la precedente, excepté qu'au lieu de prendre $EB = AE$, il faut prendre EB telle que $EB, EA :: a, b$; car $BF = EF + EB = x \pm \frac{ay}{b} = z$.

CONSTRUCTION.

De la cinquième & sixième Formule $x \pm y \pm b = z$, & $x \pm \frac{ay}{b} \pm c = z$.

8. La construction de ces deux Formules ne differe de

de celle des deux précedentes qu'à cauſe de $\pm b$, & de $\pm c$; c'eſt pourquoi ayant conſtruit (n°. 6 & 7) $x \pm y$, & $x \pm \frac{ay}{b}$; on prendra ſur AG prolongée du côté de A (en ſuppoſant qu'il y a $+b$, ou $+c$) $AI = b$, ou $= c$; & l'on menera par I la ligne IK parallele AB qui rencontrera en K, la ligne BEF prolongée du côté de B, & KF ſera $= x + y + b = z$, ou $x + \frac{ay}{b} + c = z$, & le point I ſera l'origine des inconnues y & z, s'il n'y a point de réduction pour y: mais s'il y a une réduction pour y, le point L ou M ſera l'origine des inconnues u & z; de ſorte que les coordonnées de la courbe qu'il faut décrire, ſont preſentement IK & KF, ou LK & KF, ou MK & KF.

L'on a ſuppoſé qu'il y avoit $+$ dans les deux réductions que l'on vient de conſtruire: mais il n'eſt pas plus difficile de les conſtruire, en ſuppoſant qu'il y a par-tout $-$, ou $+$ & $-$, ou $-$ & $+$: car cela ne peut que changer la poſition des lignes AB & IK par rapport à elles-mêmes, & à la ligne AH; & dans tous les cas AB & IK ſeront toujours paralleles.

CONSTRUCTION.

Des équations, ou des lieux à la ligne droite.

XVII. AU lieu de propoſer ſimplement des équations à conſtruire, on propoſera des Problêmes à réſoudre; & aprés avoir ramené les équations que l'on en tirera à l'état de celles des trois Sections précedentes, on en donnera la Conſtruction, & enſuite la Démonſtration.

PROBLÊME INDE'TERMINE'.

1. UN *angle* GAH *étant donné, il faut trouver au dedans un point* M, *d'où ayant mené* MP *parallele à* AG, PM *ſoit égale à une ligne donnée* AB. FIG. 69.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la don-

née AB, a; & l'inconnue PM, x; l'on a par la qualité du Problême $x = a$, qui eſt une équation à la ligne droite, & qui fournit cette conſtruction.

Soit menée par B la ligne BM parallele à AH. Je dis que BM renferme tous les points qui ſatisfont au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque N de la ligne BM, la droite NQ parallele à AG; AN étant un parallelogramme, l'on aura toujours $QN = AB$, ou $x = a$. *C.Q.F.D.*

PROBLÊME INDE'TERMINE'.

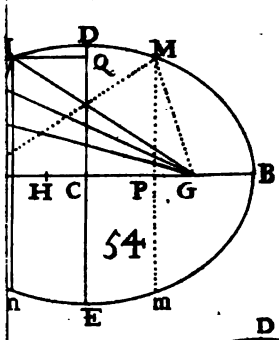
FIG. 70. 2. UN *angle* GAH *étant donné, il faut trouver dans cet angle un point* M, *d'où ayant mené* MP *parallele à* GA, AP *&* PM *ſoient enſemble égales à une ligne donnée* KL.

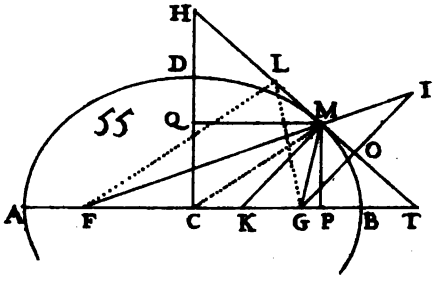
Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée KL, a; & les inconnues AP, x & PM, y; l'on aura par les qualitez du Problême $x + y = a$, ou $y = a - x$, qui eſt une équation à la ligne droite : mais parcequ'elle contient trois termes, je fais $a - x = z$: ce qui réduit l'équation à celle-ci $y = z$, qui n'en a que deux, & qui donne cette Conſtruction.

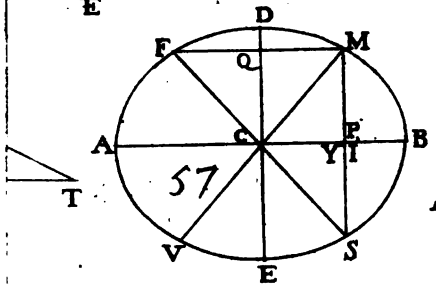
Ayant pris ſur AH & ſur AG les lignes AB & AC égales à KL, & mené la ligne BC. Je dis que tous les points comme M de la ligne BC ſatisfont au Problême.

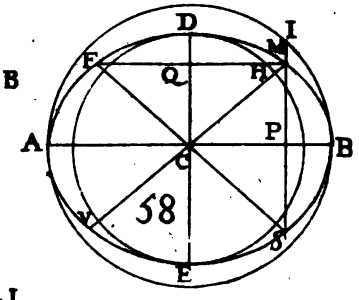
DE'MONSTRATION.

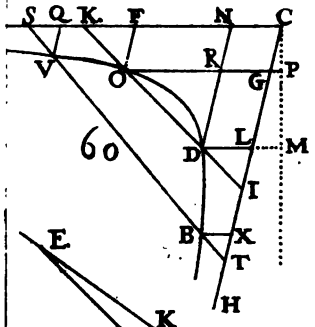
A Cauſe de la réduction $a - x = z$, AB étant nommée a, & AP, x; BP ſera $a - x$ ou z, dont l'origine eſt (art. 16 n°. 4) en B, & qui va vers A. Or puiſque (Conſt.) $AB = AC$ & PM parallele à AC, PM ſera égale à PB; c'eſt pourquoi $AP + PM$, ou $AP + PB = KL$, ou en termes Algebriques $x + y = a$. *C.Q.F.D.*

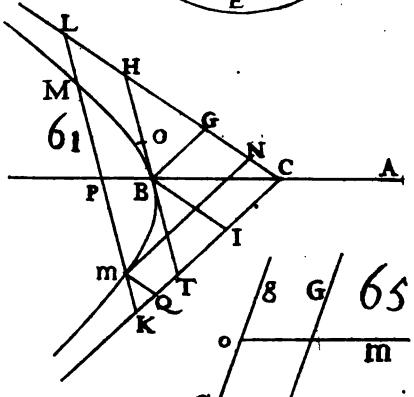

D
M
Q
H C P G B
54
n E m

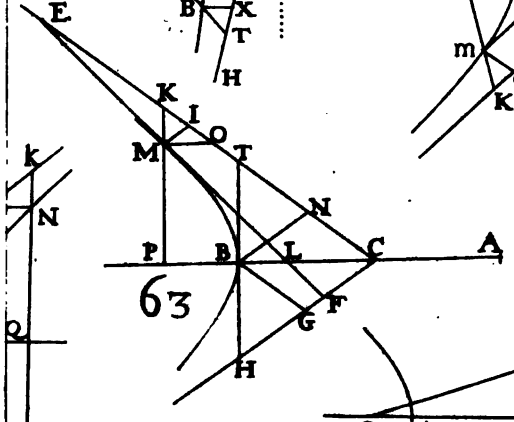

H
D
L
I
55
Q
M
O
A F C K G P B T


D
F
M
Q
A
C
P
B
Y
I
57
T
V
E
S

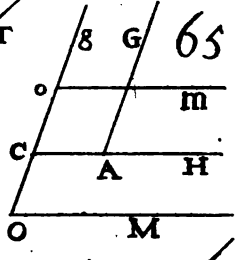

D
I
F
Q
H
A
P
B
C
58
V
S
E

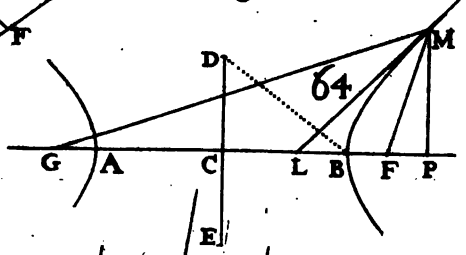

S Q K F N C
V
O
R
G
P
60
D
L
M
I
B
X
T
H

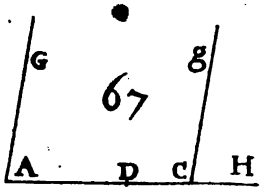

L
H
M
61
O
G
N
C
A
P
B
I
m
T
Q
K

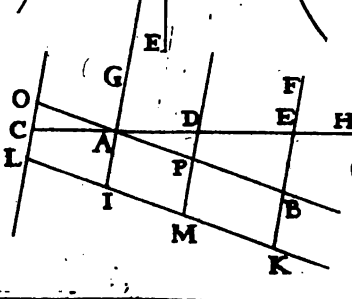

E
K
I
O
M
T
N
P
B
L
C
A
63
G
F
H

k
N
Q
n
g


g G 65
o
m
C
A H
O M


D
M
64
G A C L B F P


G
g
67
A D C H


E
G
F
O
C
D
E
H
A
L
P
68
I
B
M
K

PROBLÊME INDE'TERMINE'.

3. *DEUX lignes paralleles* AH, BK *terminées en* A & B *par une autre ligne* AG *qui fait avec elles un angle quelconque* GAH, *étant données de poſition. Il faut trouver dans l'angle* GBK *le point* M, *d'où ayant mené* MP *parallele à* GA, *qui rencontre* BK *en* E; ME *ſoit à* AP, *ou à* BE *dans la raiſon donnée de* m *à* n. FIG. 71.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée AB, ou PE, a; & les inconnues AP, ou BE, x; PM, y; EM ſera $y - a$; & l'on aura par les conditions du Problême $y - a . x :: m . n$; donc $mx = ny - na$; & comme l'on ne peut point trouver une ſeconde équation, il ſuit que le Problême eſt indéterminé: & le lieu qui renferme tous les points qui ſatisfont au Problême eſt une ligne droite; puiſque dans l'équation $mx = ny - na$, les inconnues x & y n'y ſont multipliées, ni par elle-même, ni entr'elles. Pour réduire cette équation à deux termes, je fais $y - a = z$, & mettant z dans l'équation pour $y - a$, l'on a $mx = nz$ qui donne cette conſtruction.

A étant le point fixe ou l'origine des inconnues x qui va vers H, & y qui va vers G, à cauſe de la réduction $y - a = z$, le point B devient l'origine des inconnues x qui va vers K, & z qui va vers G; ſoit pris $BC = n$, & mené par C la droite CD parallele à BG & $= m$. Je dis que la ligne indéfinie BDI menée par les points B & D ſatisfait au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque N pris ſur BI, la droite NQR parallele à AG, ou à CD, les triangles ſemblables BCD, BQN donneront $BC . CD :: BQ . QN$, ou en termes Algebriques $n . m :: x . z$; donc $mx = nz$ ou $mx = ny - na$, en mettant pour z ſa valeur $y - a$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. C. Q. F. D.

CONSTRUCTION

Des Equations ou des lieux au cercle.

PROBLÊME INDETERMINE'.

FIG. 72. XVIII. *UNE ligne* AB *étant donnée de grandeur & de poſition. Il faut trouver hors de cette ligne un point* M, *en ſorte qu'ayant mené de ce point aux extremitez* A *&* B *de la ligne* AB, *les droites* MA, MB, *le quarré de* MA *ſoit au quarré de* MB *dans la raiſon donnée de* m *à* n.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, on abbaiſſera du point M ſur AB la perpendiculaire MP, & ayant nommé la donnée AB, a, & les indéterminées AP, x; & PM, y; PB ſera $a - x$; MA^2, $xx + yy$, & MB^2, $aa - 2ax + xx + yy$, & l'on aura par les qualitez du Problême $xx + yy . aa - 2ax + xx + yy :: m . n$; donc $nxx + nyy = maa - 2max + mxx + myy$, ou en ſuppoſant que m ſurpaſſe n, $mxx - nxx - 2max + maa + myy - yy = 0$, ou $xx - \frac{2ma\,x}{m-n} + \frac{maa}{m-n} + yy = 0$, en diviſant par $m - n$; & comme on ne peut point trouver d'autre équation pour faire évanouir une des inconnues, il ſuit que le Problême eſt indéterminé; & parceque dans l'équation il y a deux quarrez inconnus délivrez de toute quantité connue qui ont mêmes ſignes dans le même membre de l'équation, & que les inconnues AP & PM exprimée par x & y font un angle droit; il ſuit que l'équation appartient au cercle, ou ce qui eſt la même choſe, que tous les points qui ſatisfont au Problême ſont à la circonference d'un cercle; il ne s'agit donc plus que de le déterminer par le moyen de l'équation que l'on viens de trouver: mais comme il y a un ſecond terme dans l'équation, il eſt clair (art. 12 n°. 14) que le point A qui eſt l'origine des inconnues x & y n'eſt point le centre de ce cercle; pour le trouver il faut faire évanouir le ſecond

terme ; pour ce ſujet, je fais $x - \frac{ma}{m-n} = z$, qui réduira l'équation à celle-ci $yy = \frac{mmaa}{mm-2mn+nn} - zz$, où les inconnues y & z ont leur origine au centre. Or pour trouver le centre du cercle, ou l'origine des inconnues y & z, il faut conſtruire la réduction $x - \frac{m-n}{ma} = z$. Ce qui ſe fait en cette ſorte.

A étant l'origine des inconnues x qui va vers B, & y qui lui eſt perpendiculaire, ſoit priſe $AC = \frac{ma}{m-n}$, le point C ſera (art. 16 n°. 2) l'origine des inconnues y & z, & par conſequent le centre du cercle qu'il faut décrire : mais le terme connu de l'équation réduite $\frac{mmaa}{mm-2mn+nn}$ eſt le quarré du demi diametre du même cercle ; c'eſt pourquoi ſi du centre C & du rayon $= \frac{\sqrt{mmaa}}{m-n}$, l'on décrit le cercle DME, tous les points M de ſa circonference ſatisferont au Problême.

DEMONSTRATION.

AYANT abaiſſé d'un point quelconque M pris ſur la circonference du cercle la perpendiculaire MP, par la proprieté du cercle CD^2, ou $CE^2 - CP^2 = PM^2$, ce qui eſt en termes Algebriques $\frac{maa}{mm-2mn+nn} - zz = yy$: mais $zz = xx - \frac{2max}{m-n} + \frac{mmaa}{mm-2mn+nn}$; mettant donc cette valeur de zz dans l'équation précedente, on aura aprés les réductions, & tranſpoſitions $mxx - nxx - 2max + maa + myy - nyy = 0$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDETERMINE'.

FIG. 72. 1. *LES mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Problême précedent; il faut trouver le point* M *enſorte que* MA *ſoit à* MB *dans la raiſon donnée de* m *à* n.

En donnant aux lignes les mêmes noms que dans le Problême précedent, on aura par la qualité du Problême $\sqrt{xx+yy} \cdot \sqrt{aa-2ax+xx+yy} :: m . n$; donc $n \times \sqrt{xx+yy} = m\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$, ou $mnxx+nnyy = mmaa-2mmax+mmxx+mmyy$, ou en ſuppoſant que m ſurpaſſe n, & diviſant par $mm-nn$, l'on aura $xx + \frac{-2mmax+mmaa}{mm-nn} + yy = 0$, qui eſt une équation au cercle dont l'origine des inconnues x & y n'eſt point le centre à cauſe du ſecond terme $\frac{-2mmax}{mm-nn}$; faiſant donc $x - \frac{mma}{mm-nn} = z$ pour faire évanouir le ſecond terme, l'équation ſe réduira à celle-ci $zz - \frac{mmnaa}{m^4-2mmnn+n^4} + yy = 0$, où les inconnues z & y ont leur origine au centre du cercle qu'il faut décrire. Pour trouver ce centre, il faut conſtruire la réduction $x - \frac{mma}{mm-nn} = z$. Ce qui ſe fait en cette ſorte.

Le point A étant l'origine des inconnues de l'équation à réduire x qui va vers B, & y qui lui eſt perpendiculaire; ſoit priſe $AC = \frac{mma}{mm-nn}$, le point C ſera celui que l'on cherche; c'eſt pourquoi ſi du centre C, & du rayon $= -\frac{mma}{mm-nn}$, qui eſt la racine du terme connu de l'équation réduite, l'on décrit le cercle DME, tous les points de ſa circonference ſatisferont au Problême.

On peut encore trouver plus ſimplement le centre

du cercle en cette ſorte ; puiſque $\frac{mma}{mm-nn}$ eſt l'expreſſion de la diſtance du point A au centre que l'on cherche, ſi l'on ôte & ſi l'on ajoute à cette expreſſion l'expreſſion du demi diametre qui eſt $\frac{mna}{mm-nn}$, l'on aura $\frac{mma-mna}{mm-nn}$, & $\frac{mma+mna}{mm-nn}$, & diviſant les deux termes de la premiere fraction par $m-n$, & ceux de la ſeconde par $m+n$, l'on aura $\frac{ma}{m+n}$ & $\frac{ma}{m-n}$; prenant donc $AD=\frac{ma}{m+n}$, & $AE=\frac{ma}{m-n}$, DE ſera le diametre du cercle, & par conſequent le point C qui diviſe DE par le milieu, ſera ſon centre.

DE'MONSTRATION.

AYANT abaiſſé d'un point quelconque M la perpendiculaire PM, par la proprieté du cercle $DP \times PE = PM^2$. Ce qui eſt en termes Algebriques $\frac{mmnaa}{m^4-2mmnn+n^4} - zz = yy$: mais $zz = \frac{m^4aa}{m^4-2mmnn+n^4} - \frac{2mmax}{mm-nn} + xx$, & mettant cette valeur de zz dans l'équation précedente l'on a $\frac{mmnaa-m^4aa}{m^4-2mmnn+n^4} + \frac{2mmax}{mm-nn} - xx = yy$, & en diviſant les deux termes de la premiere fraction par $mm-nn$ l'on a $xx - \frac{2mmax+mnaa}{mm-nn} + yy = 0$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

2. SI dans les équations à réduire des deux Problêmes précedens m eſt égale à n, elles deviendront $x = \frac{1}{2}a$, qui montre que le lieu qui ſatisfait au Problême eſt une ligne droite qu'il faudra élever perpendiculaire-

ment au milieu de AB, & ſi m eſt moindre que n, dans les réductions, & dans les équations réduites n ſe trouvera en la place de m, & m en la place de n, & le centre du cercle ſera ſur AB prolongée du côté de A.

PROBLÈME INDETERMINE'.

FIG. 73. 3. *DEUX lignes* GA, HB *perpendiculaires l'une à l'autre, & un point fixe* D *ſur* AG *étant données; il faut trouver dans l'angle* GAH *un point* M *par où & par* D *ayant mené la droite* MDB *qui rencontre* AH *en* B, *le rectangle* MD × DB *ſoit égal au quarré de la ligne donnée* DA.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, mené du point M ſur GA la perpendiculaire MP, & nommé la donnée AD, a; & les indéterminées DP, x; PM, y; à cauſe du triangle rectangle DPM, MD ſera $\sqrt{xx+yy}$; & à cauſe des triangles ſemblables PDM, ADB; $DP\ (x).\ DM\ (\sqrt{xx+yy}) :: DA\ (a).\ DB = \frac{a\sqrt{xx+yy}}{x}$; donc par la condition du Problême $\frac{axx+ayy}{x}\ (MD \times DB) = aa\ (DA^2)$; donc $xx - ax + yy = 0$, qui eſt une équation au cercle où les inconnues x & y n'ont point leur commencement au centre, parceque xx a un ſecond terme $-ax$; qu'il faut par conſequent faire évanouir; c'eſt pourquoi en faiſant $x - \frac{1}{2}a = z$, on réduira l'équation à celle-ci $zz - \frac{1}{4}aa + yy = 0$, ou $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, où les indéterminées y & z, ont leur origine au centre que l'on trouvera en faiſant $DC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}a$, à cauſe de la réduction $x - \frac{1}{2}a = z$; & parceque le terme connu de l'équation eſt $\frac{1}{4}aa$ dont la racine eſt $\frac{1}{2}a$ = au demi diametre du cercle, on décrira du centre C par

par *D* le cercle *DMG* qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT abaiſſé d'un point quelconque *M* la perpendiculaire *PM*, par la proprieté du cercle, $DP \times PG = PM^2$, ce qui eſt en termes algebriques (*DP* étant, *x*; & *DG*, *a*;) $ax - xx = yy$, ou $xx - ax + yy = 0$, qui eſt l'équation que l'on à conſtruite. *C. Q. F. D.*

CONSTRUCTION.

Des Equations ou des lieux à la Parabole.

PROBLÊME INDETERMINE'.

XIX. *DEUX lignes paralleles* AH, BG *dont les extremitez* A *&* B *ſont fixes étant données de poſition; il faut trouver entre les deux un point* M, *par où & par le point* A, *ayant mené la droite* AMD *&* MP *parallele à* AB; BD *ſoit à* MP; *comme une ligne donnée* m *eſt à* AB. FIG. 74.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée *AB*, *a*; & les indéterminées *AP*, *x*; *PM*, *y*; les triangles ſemblables *MPA*, *ABD* donneront *MP* (*y*). $PA(x) :: AB(a) . BD = \frac{ax}{y}$, & par les qualitez du Problême $\frac{ax}{y} . y :: m . a$; donc $\frac{aax}{m} = yy$, qui eſt une équation à la parabole, où les inconnues *x* & *y* ont leur origine au ſommet du diametre qui eſt la ligne *AH*, ſuivant ce qui eſt démontré dans la quatriéme & cinquiéme Section.

Si l'on fait $m . a :: a . \frac{aa}{m} = p$; *p* ſera le parametre du diametre *AH*, & l'équation ſera $px = yy$, en mettant pour $\frac{aa}{m}$ ſa valeur *p*, & l'on décrira par le moyen de cette équation la parabole *AM* ſur le diametre *AH* dont le parametre eſt *p*, comme il eſt enſeigné (art. 10 n°. 11),

ſi l'angle BAP eſt droit, ou art. 11 n°. 11, s'il eſt oblique. Et je dis que tous les points de cette parabole ſatisfont au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque M, pris ſur la parabole, la ligne MP parallele à BA, l'on aura par la proprprieté de la parabole le rectangle de l'abſciſſe $AP \times p = PM^2$, ce qui eſt en termes algebriques $px = yy$, ou $\frac{aax}{m} = yy$, en remettant pour p ſa valeur $\frac{aa}{m}$ qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

PROBLEME INDETERMINE'.

FIG. 74. 75. 1. *AYANT ſuppoſé les mêmes choſes que dans le Problême précedent, & ayant prolongé* PM *en* E. *On demande que le point* M *ſoit tel que* BD *ſoit à* ME; *comme une ligne donnée* m *à* BA.

En laiſſant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a donnez dans le Problême précedent, ME ſera $a - y$, & les qualitez du Problême donneront $\frac{ax}{y} . a - y :: m . a$; donc $\frac{aax}{y} = ma - my$, ou $\frac{aax}{m} = ay - yy$, ou $yy - ay + \frac{aax}{m} = o$, qui eſt une équation à la parabole, parcequ'il n'y a qu'un quarré inconnu yy, & que les deux inconnues x & y ne ſe multiplient point : mais parcequ'elle contient trois termes, le ſommet du diametre ſur lequel il faut décrire la parabole, n'eſt point en A; quoique le point A ſoit l'origine des inconnues x & y. Il faut donc réduire cette équation, afin de trouver par le moyen des réductions le ſommet du diametre ſur lequel on doit décrire la parabole qui doit réſoudre le Problême. En faiſant pour ce ſujet $y - \frac{1}{2} a = u$, afin de faire évanouir le ſecond terme ay, l'on réduit l'équation à celle-ci $uu - \frac{1}{4} aa$

$+\frac{aax}{m} = 0$, ou $uu = \frac{1}{4}aa - \frac{aax}{m}$: car le quarré uu doit être ſeul dans un des membres de l'équation, & comme il y a encore trois termes dans cette équation, l'origine des inconnues u & x, n'eſt point encore au ſommet du diametre ſur lequel on doit décrire la parabole; il faut donc encore que les deux termes $\frac{1}{4}aa - \frac{aax}{m}$ ſe réduiſent à un ſeul. Pour ce ſujet on cherchera 1°. une 3e proportionnelle à m & à a, qui étant nommée b; l'équation réduite ſe changera en celle-ci $uu = \frac{1}{4}aa - bx$; puiſque $\frac{aa}{m} = b$. 2°; ayant pris $bc = \frac{1}{4}aa$, l'on aura $uu = bc - bx$, en mettant pour $\frac{1}{4}aa$ ſa valeur bc; & faiſant enfin $c - x = z$, l'on aura $uu = bz$, en mettant pour $c - x$ ſa valeur z, qui eſt une équation où les inconnues u & z ont leur origine au ſommet du diametre ſur lequel il faut décrire la parabole, & dont le parametre eſt b.

Les réductions & les changemens qne l'on vient de faire fourniſſent la conſtruction qui ſuit. Il eſt clair que la parabole doit paſſer par les points A & B : car ſi dans l'équation à réduire $yy - ay + \frac{aax}{m} = 0$, l'on fait $y = 0$; les termes où y ſe rencontre deviendront nuls, & l'on aura $\frac{aax}{m} = 0$, ou $x = 0$, qui montre qu'elle paſſe par le point A, puiſque x & y s'y aneantiſſent; & ſi au lieu de $y = 0$, on fait $x = 0$, le terme $\frac{aax}{m}$ ſe détruira, & l'on aura $yy - ay = 0$, d'où l'on tire $y = a$, ce qui montre que la parabole paſſe auſſi par le point B; puiſqu'en ce cas le point P tombant en A à cauſe de $x = 0$, le point M tombe en B à cauſe de $y = a$.

Le point A étant l'origine des inconnues x qui va FIG. 75.

vers H, & y qui va vers B ; à cauſe de la premiere réduction $y - \frac{1}{2}a = u$, on diviſera AB par le milieu en C, & ayant mené par C la droite CF parallele à AH, le point C ſera l'origine des inconnues u qui va vers A & vers B, & x qui va vers F : & à cauſe de la ſeconde réduction $c - x = z$, ayant fait $CF = c$, alors le point F ſera l'origine des inconnues z qui va vers C, & u qui demeure parallele à AB, & le ſommet du diametre BC ſur lequel l'on décrira (art. 10. n°. 12, ou art. 11 n°. 11, ſelon que l'angle CAH ou ACF eſt droit ou oblique) la parabole AFB, par le moyen de l'équation réduite $uu = bz$, qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur la parabole la ligne MI parallele à BC, l'on aura par la proprieté de la parabole $uu = bz$, ou $yy - ay + \frac{aay}{m} = 0$, en remettant pour u, pour z, & pour b, leurs valeurs $y - \frac{1}{2}a$, $c - x$, & $\frac{aa}{m}$, & pour bc ſa valeur $\frac{1}{4}aa$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDE'TERMINE'.

FIG. 76. 2. *UNE ligne* AB *étant donnée de grandeur & de poſition. Il faut trouver un point* M *hors de cette ligne ; en ſorte qu'ayant mené la ligne* MP *parallele à une ligne donnée* AG, *& qui rencontre* AB, *en* P ; *le rectangle* AP × PB *ſoit égal au rectangle de* PM *par une ligne donnée* b.

Ayant ſuppoſé le Problême reſolu, ſoit diviſée AB par le milieu en C, & nommé la donnée AC, ou CB, a ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; AP ſera $a + x$, & PB, $a - x$; & l'on aura par les qualitez du Problême $aa - xx = by$, ou $xx = aa - by$, qui eſt une équa-

tion à la parabole où les indéterminées x & y n'ont point leur origine au ſommet du diametre ſur lequel il faut la décrire.

Pour réduire cette équation, je prens $bc = aa$, & l'équation deviendra $xx = bc - by$, en mettant bc pour aa. Et faiſant $c - y = u$, & mettant u en la place de $c - y$, l'on aura $xx = bu$, que l'on conſtruira en cette ſorte.

Le point C étant l'origine des inconnues x qui va vers B & vers A, & y qui va vers D parallele à AG, à cauſe de la réduction $c - y = u$, l'on prendra $CD = c$, & le point D ſera l'origine des inconnues u qui revient vers C, & x qui eſt parallele à AB, & le ſommet du diametre DC ſur lequel on décrira (art. 10 n° 11, ou art. 11 n° 11) la parabole $ADMB$, par le moyen de l'équation réduite $xx = bu$, qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

IL eſt clair 1°. que la parabole paſſe par les points A & B : car ſi dans l'équation à réduire $xx = aa - by$, on fait $y = 0$, le terme $- by$ deviendra nul, & l'on aura $xx = aa$; donc $x = \pm a = CA$, ou CB.

2°. D'un point quelconque M pris ſur la parabole ayant mené MP & MQ paralleles à DC & à CB, l'on aura (art. 10 n° 8) $DQ . DC :: QM^2 . CB^2$, ou en termes algebriques u, ou $c - y . c :: xx . aa$, & partant $aac - aay = cxx$: mais l'on a pris $bc = aa$; l'on a donc $c = \frac{aa}{b}$, & mettant dans l'équation en la place de c ſa valeur $\frac{aa}{b}$, elle deviendra $aa - by = xx$, qui eſt celle que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDETERMINE'.

FIG. 77. 3. *UN angle* GAH, *& un point fixe* B *ſur un de ſes côtez* AH *étant donnez de poſition. Si par le point* B *on mene la droite* BC *perpendiculaire à* AH, *& d'un point quelconque* P *la droite* PE *parallele à* BC *qui rencontre* AG *en* E, *& que du centre* B, *& du rayon* PE *l'on décrive un arc de cercle qui coupe* PE *en* M; *& comme l'on peut trouver une infinité de points comme* M, *il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe que tous les points* M *forment.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, mené BM, & nommé les données AB, a; BC, b; & les indéterminées BP, x; PM, y; AP ſera $a+x$; & les triangles ſemblables donneront $AB\ (a).BC\ (b) :: AP\ (a+x)$ $. PE = \frac{ab+bx}{a} =$ (Conſt.) BM; & à cauſe du triangle rectangle BPM, l'on aura $xx+yy = \frac{aabb+2abbx+bbxx}{aa}$, ou $aaxx+aayy = aabb+2abbx+bbxx$, ou en ſuppoſant que a ſurpaſſe b, $aaxx - bbxx = 2abbx+aabb - aayy$, qui eſt une équation à l'Ellipſe. Si l'on ſuppoſoit a moindre que b, l'on auroit $bbxx - aaxx = -2abbx - aabb + aayy$, qui eſt une équation à l'Hyperbole. Enfin ſi l'on ſuppoſe $a = b$, l'on aura, aprés avoir mis a à la place de b, & réduit l'équation à l'ordinaire, $yy = 2ax + aa$ qui eſt une équation à la parabole, dont le ſommet n'eſt point en B à cauſe qu'elle contient trois termes.

Pour la réduire, on la diviſera premierement par 2, afin que x ne ſoit accompagnée d'aucune quantité connue dans la réduction, & l'on aura $\frac{1}{2}yy = ax + \frac{1}{2}aa$, & ayant fait $x+\frac{1}{2}a = z$, l'équation réduite ſera $\frac{1}{2}yy = az$, ou $yy = 2az$ en mettant z pour $x+\frac{1}{2}a$. Ce qui donne cette conſtruction.

A cauſe de la réduction $x + \frac{1}{2}a = z$, on diviſera AB par le milieu en D, & le point D ſera le ſommet de l'axe DH, & la parabole ſe trouve décrite par la Conſtruction.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur la parabole la ligne MP perpendiculaire à DH, par la proprieté de la parabole, le parametre de l'axe étant (art. 10 n° 7) $2a$, l'on aura $2az = yy$, ou $2ax + aa = yy$, en remettant pour z ſa valeur $x + \frac{1}{2}a$. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

4. CE Problême pourroit ſervir de fondement à un Traité des trois Sections coniques; puiſque la même équation convient à toutes les trois en faiſant ſeulement BC égale, moindre, ou plus grande que AB, & que c'eſt auſſi la même deſcription pour toutes les trois. Je ne m'en ſuis neanmoins ſervi que pour la parabole, tant parceque les deſcriptions que j'ai données de l'Ellipſe, & de l'Hyperbole ne ſont pas moins ſimples, que parceque je n'aurois pû démontrer, comme j'ai fait, d'une maniere generale les proprietez de l'Hyperbole par rapport à ſes axes, & à tous ſes diametres.

5. Il eſt aiſé de voir que B eſt le foyer de la parabole AM; A, le point generateur; AF parallele à BC, la ligne generatrice : car l'équation réduite $yy = 2az$ montre que $2a$ eſt le parametre, & par la conſtruction $BD = DA = \frac{1}{2}a$. Et parceque (Hyp.) $BC = AB$ l'on a auſſi $AP = PE =$ (Conſt.) $BM = FM$; c'eſt pourquoi cette deſcription eſt la même que celle de l'article 10, comme on vient de remarquer.

PROBLÈME INDETERMINÉ.

6. SOIT *une équation locale* $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} - by - - bb = o$, *qui appartient à une des quatre courbes du premier genre ; puiſque les inconnues* x *&* y *n'excedent point le ſecond degré.*

Pour ramener cette équation à l'état de quelqu'une de celles des trois Sections précedentes, je fais $x + \frac{ay}{b} = z$, pour faire évanouir le ſecond terme $\frac{2axy}{b}$, & l'équation ſe change en celle-ci $zz - by - bb = o$, ou $zz = by + bb$, où l'on voit déja qu'elle eſt à la parabole ; puiſqu'il n'y a qu'un quarré inconnu zz ; mais les inconnues z & y n'ont point leur origine au ſommet du diametre ſur lequel il la faut décrire, parcequ'il y a encore trois termes ; c'eſt pourquoi je fais encore $y + b = u$, & l'équation devient $zz = bu$, qui eſt ſemblable à celle de l'art. 10,

FIG. 78. Pour conſtruire cette équation ſoit A l'origine des inconnues y qui va vers H, & x, qui fait avec AH un angle quelconque, & va vers G ; à cauſe de la deuxiéme réduction $y + b = u$, on prolongera AH du côté de A en I, en ſorte que $AI = b$, & le point I ſera l'origine des inconnues u qui va toujours vers H, & x qui fait toujours le même angle avec IH, & eſt parallele à AG.

A cauſe de la premiere réduction $x + \frac{ay}{a} = z$, l'on menera par I la droite IO parallele à AG, & ayant fait $IO = a$; l'on menera de O par A la droite OAK, & le point O ſera le ſommet du diametre ſur lequel il faut décrire la parabole : car ſi par quelque point B, pris ſur AH l'on mene la droite PBM parallele à IO, l'on aura à cauſe des triangles ſemblables AIO, ABP, $AI\,(b) . IO\,(a) :: AB\,(y) . BP = \frac{ay}{b}$; & par-

tant

tant $PM = x + \frac{ay}{b} = z$: mais parceque les coordonnées de la parabole ſont OP & PM, l'expreſſion de OP doit ſe trouver dans l'équation réduite auſſi-bien que celle de PM, qui eſt z, & au contraire celle de IB, qui eſt u ne s'y doit plus rencontrer ; parceque (art. 10) une équation à la parabole ne renferme que les expreſſions de l'abciſſe, de l'appliquée, & du parametre. Il faut donc trouver une équation qui renferme l'expreſſion de IB (u) & celle de OP, afin de faire évanouir u de l'équation réduite, & introduire en ſa place l'expreſſion de OP. Pour ce ſujet, je nomme la donnée OA, c ; & l'indéterminée OP, f ; & les triangles ſemblables AIO, ABP donneront $AI . AB :: AO . AP$: & *componendo* $AI . IB :: AO . OP$, ce qui eſt en termes algebriques $b . u :: c . f$; donc $uc = bf$, & partant $u = \frac{bf}{c}$, & mettant cette valeur de u dans l'équation réduite $zz = bu$, l'on aura $zz = \frac{bbf}{c}$, & ſi l'on fait $\frac{bb}{c} = f$, l'on aura $zz = ff$, & l'on décrira par l'article 10 n° 11, ou par l'article 11 n° 11, ſelon que l'angle OPM eſt droit ou oblique, la parabole OM qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M la droite MP parallele à AG ; OP étant f ; PM, z ; & le parametre f ; l'on aura par la proprieté de la parabole $zz = ff$, ou $zz = bu$, en remettant pour f & pour f, leurs valeurs $\frac{bb}{c}$ & $\frac{cu}{b}$, & remettant encore pour zz, & pour u, leurs valeurs $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$; & $y + b$, l'on aura $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} = by + bb$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

REMARQUE

7. IL n'y a que la portion de la parabole qui commence en G, & va vers M qui réſout le Problême, puiſque x & y commencent au point A.

CONSTRUCTION.

Des Equations, ou des lieux à l'Ellipſe.

PROBLEME INDE'TERMINE'.

FIG. 79. XX. *UN triangle* ABC *étant donné, il faut trouver un point* M *hors de ce triangle, en ſorte qu'ayant mené* MPF *parallele à* AB *qui rencontre* AC *en* P, *&* BC *en* F, *le quarré de* PM, *& le quarré de* FP *ſoient enſemble égaux au quarré de* AB.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé les données AC, a; AB, b; & les indéterminées AP, x; PM, y; CP ſera $a - x$, & les triangles ſemblables CAB, CPF donneront $CA\,(a).\ AB\,(b) :: CP\,(a-x).\ PF = \frac{ab-bx}{a}$, donc par les qualitez du Problême $\frac{aabb-2abbx+bbxx}{aa} + yy = bb$, ou $xx - 2ax + \frac{aayy}{bb} = 0$, qui eſt une équation à l'Ellipſe dont le point A qui eſt l'origine des inconnues x & y, n'eſt point le centre, à cauſe qu'il y a dans l'équation un ſecond terme.

Je fais donc pour la réduire $x - a = z$, & l'équation devient par ce moyen $zz - aa + \frac{aayy}{bb} = 0$, ou $\frac{a-yy}{bb} = aa - zz$, d'où ſuit cette conſtruction.

La réduction $x - a = z$, montre que le point C eſt le centre de l'Ellipſe, puiſqu'il n'y a point de réduction pour y; & l'équation réduite, en faiſant $y = 0$, donne $z = \pm a$; ce qui fait voir que z va vers A & vers D, & ſe termine en ces deux points, & que par conſequent AD eſt un des diametres: ce que le terme connu aa de l'é-

quation réduite fait auſſi connoître : mais parceque le quarré connu aa ſe trouve encore avec yy ; il ſuit (art. 12 n°. 9) que bb eſt le quarré du diametre conjugué au diametre AD ; c'eſt pourquoi ſi l'on mene par le centre C la ligne GCH parallele à AB, & qu'on faſſe CG, & CH chacune $= AB = b$; GH ſera le diametre conjugué au diametre AD, & l'on décrira par l'art. 12 n°. 21, ou art. 13 n°. 37, ſelon que l'angle BAC, ou ACH eſt droit, ou oblique, l'Ellipſe $AGDH$, qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené librement la droite PM parallele à CH, par la proprieté de l'Ellipſe $AP \times PD . PM^2 :: CA^2 . CG^2$, ce qui eſt en termes algebriques $2ax - xx . yy :: aa . bb$, d'où l'on tire $xx - 2ax + \frac{aayy}{bb} = 0$. C. Q. F. D.

PROBLEME INDE'TERMINE'.

1. *UN triangle* ABC *dont les côtez* AC, BC *ſont prolongez vers* H *& vers* G *étant donné. Si d'un point quelconque* P *pris ſur la baſe* AB, *on éleve* PEF *perpendiculaire à* AB, *ou parallele à quelque ligne donnée de poſition. Il faut trouver quelle eſt la courbe qui diviſe* EF, *& ſes ſemblables en* M, *de maniere que* PE . PM :: PM . PF. FIG. 80.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, mené CD parallele à PM, & nommé les données AB, a ; AD, b ; DC, c ; DB, d ; & les indéterminées AP, x, PE, z, PM, y ; PF, u ; PB ſera $a - x$; & les triangles ſemblables APE, ADC & BDC, BPF donneront x (AP) . z (PE) :: b (AD) . c (DC), d'où l'on tire $bz = cx$; & d (BD) . c (DC) :: $a - x$ (BP) . u (PF), d'où l'on tire $du = ac - cx$: & par les qualitez du Problême, z (PE) . y (PM) :: y (PM) . u (PF), d'où l'on tire $zu = yy$; l'on a donc trois équations, que l'on réduira à une ſeule, en faiſant évanouir z & u : (car il ne faut pas faire évanouir

x & y ; parcequ'elles ont les qualitez requiſes par la premiere & huitiéme obſervation de l'art. 4 qui ſont celles qu'il faut le plus exactement ſuivre dans les Problêmes indéterminez) qui ſera $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$; ou $xx - ax + \frac{bdyy}{cc} = 0$, qui eſt une équation à l'Ellipſe, que l'on conſtruira en cette ſorte.

Ayant fait $x - \frac{1}{2}a = z$, l'équation ſe réduira à celle-ci $zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bdyy}{cc} = 0$, ou $\frac{bdyy}{cc} = \frac{1}{4}aa - zz$. Or à cauſe de la réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, ſi l'on diviſe AB par le milieu en O, le point O ſera le centre de l'Ellipſe, & l'origine des inconnues z qui va vers B & vers A, & ſe termine en ces deux points (car ſi dans l'équation réduite on fait $y = 0$, l'on aura $z = \pm\frac{1}{2}a$) & y qui va parallele à BC. Pour avoir l'expreſſion du demi diametre conjugué au diametre AB, on fera $bd . cc :: \frac{1}{4}aa . \frac{aacc}{4bd}$, & $\frac{ac}{2\sqrt{bd}}$ ſera (art. 12 n°. 11) l'expreſſion cherchée ; prenant donc ſur KOL parallele à DC, OK & OL chacune égale à $\frac{ac}{2\sqrt{bd}}$, KL ſera le diametre conjugué au diametre AB. L'on décrira l'Ellipſe $AMBL$ par l'art. 12 n°. 21, ou art. 13 n°. 37.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur l'Ellipſe la droite MP parallele à CD, l'on aura par la proprieté de l'Ellipſe $AP \times PB, PM^2 :: AB^2 . KL^2$. Ce qui eſt en termes algebriques $aa - xx . yy :: aa . \frac{aacc}{bd}$, d'où l'on tire $xx - ax + \frac{bdyy}{cc} = 0$. *C. Q. F. D.*

REMARQUES.

2. SI le point B étoit infiniment éloigné du point A, la ligne FCB ſeroit parallele à AB, & dans l'équation précedente $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$, a & d deviendroient infiniment grandes par rapport aux autres lettres ; de ſorte que le terme xx ſeroit nul par rapport à ax, a ſeroit $= d$, & l'on auroit cette équation $\frac{ccx}{b} = yy$ qui montre que la courbe AMC ſeroit une parabole.

3. SI le point B étoit de l'autre côté de A ſur le prolongement de AD, dans l'équation $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$, a d & x deviendroient negatives, & il faudroit changer les ſignes des termes où a, d & x ne ſont multipliées ni par elles mêmes ni entr'elles, & l'on auroit $ax - xx = -\frac{bdyy}{cc}$, ou $xx - ax = \frac{bdyy}{cc}$, qui montre que la courbe AMC ſeroit alors une Hyperbole.

PROBLÈME INDE'TERMINE'.

4. SOIT l'équation $xx - \frac{bxy}{a} + cx + \frac{bbyy}{2aa} = 0$, en faiſant $x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c = z$, l'équation à réduire devient $zz - \frac{1}{4}cc + \frac{bcy}{2a} + \frac{bbyy}{4aa} = 0$, ou $yy + \frac{2acy}{b} - \frac{aacc + 4aazz}{bb} = 0$, & faiſant encore $y + \frac{ac}{b} = u$, l'on a l'équation réduite $uu - \frac{2aacc + 4aazz}{bb} = 0$, ou $\frac{4aazz}{bb} = \frac{2aacc}{bb} - uu$ qui eſt une équation à l'Ellipſe.

Pour la conſtruire, ſoit le point A l'origine des inconnues y qui va vers H, & x qui va vers G, & qui font FIG. 81.

l'angle GAH tel que le demande le Problême d'où l'on ſuppoſe que l'équation que l'on conſtruit a été tirée. A cauſe de la ſeconde réduction $y + \frac{ac}{b} = u$, l'on prolongera AH du côté de A, & l'on fera $AI = \frac{ac}{b}$; & le point I ſera l'origine de u qui va toujours vers H, & de x qui qui demeure parallele à AG. A cauſe de la premiere réduction $x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c = z$, l'on menera par I la droite IK parallele à AG, & ayant fait $IK = \frac{AI \times b}{2a} = \frac{1}{2}c$, puiſque $AI = \frac{ac}{b}$, l'on menera KA indéfiniment prolongée : & parcequ'il y a encore dans la réduction $+ \frac{1}{2}c$, ayant pris ſur la ligne IK prolongée $KO = \frac{1}{2}c$, l'on menera OD parallele à KA, qui rencontrera AH en R ; & le point O ſera le centre de l'Ellipſe & l'origine des inconnues u qui eſt parallele à AH, & z parallele à AG : car ayant mené par quelque point B de la ligne AH, la droite $PBCM$ qui rencontre OR en P, & KA en C : BC ſera $= \frac{by}{2a}$: car $AI . IK :: 2a . b :: AB\ (y) . BC = \frac{by}{2a}$: & partant $PM\ (z) = BM - BC + CP = x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c$.

Mais parceque les coordonnées de l'Ellipſe ſont OP & PM, en ſuppoſant l'Ellipſe décrite, l'expreſſion de OP doit ſe trouver dans l'équation réduite auſſi bien que celle de PM qui eſt z. Au contraire celle de IB qui eſt u ne doit plus s'y rencontrer. Il faut donc trouver une équation qui renferme l'expreſſion de IB (u), & celle de OP, afin de faire évanouir u de l'équation réduite, & d'introduire en ſa place l'expreſſion de OP. Pour ce ſujet ; ayant prolongé AG en F, & nommé les données

AI (Conſt.) $\frac{ac}{b}$; KA, ou OF, g ; & l'inconnue OP, ou KC, f ; les triangles ſemblables AIK, ABC donneront $AI . AB :: AK . AC$, & *componendo* $IB . AI :: KC$, ou $OP . KA$, ou OF : ce qui eſt en termes analytiques $u . \frac{ac}{b} :: f . g$, d'où l'on tire $u = \frac{acf}{bg}$, ou $uu = \frac{aaccff}{bbgg}$, & mettant cette valeur de uu dans l'équation réduite, l'on aura $\frac{4aazz}{bb} = \frac{2aacc}{bb} - \frac{aaccff}{bbgg}$, ou $\frac{4ggzz}{cc} = 2gg - ff$, d'où l'on tire cette Conſtruction. Soit faite $OD = \sqrt{2gg}$; OD ſera le demi-diametre de l'Ellipſe, & ayant fait $4gg . cc :: 2gg . \frac{2ggcc}{4gg} = \frac{1}{2} cc$, ſoit priſe $OQ = \sqrt{\frac{1}{2}} cc$, OQ ſera le demi-diametre conjugué à OD, & l'on décrira (art. 13. n°. 37) l'Ellipſe QSD qui rencontrera KA en S, & qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur l'Ellipſe entre G & S l'appliquée MP parallele à OQ. Par la proprieté de l'Ellipſe $OD^2 - OP^2 . PM^2 :: OD^2 . OQ^2$; ce qui eſt en termes algebriques $2gg - ff . zz :: 2gg . \frac{1}{2} cc :: 4gg . cc$, d'où l'on tire $\frac{4ggzz}{cc} = 2gg - ff$, ou $\frac{4aazz}{bb} = \frac{2aacc}{bb} - uu$, en mettant pour ff ſa valeur $\frac{bbgguu}{aacc}$, & réduiſant : mais par les deux réductions précedentes l'on a les valeurs de zz & de uu ; c'eſt pourquoi en mettant ces valeurs de zz & de uu dans l'équation précedente, l'on aura, aprés avoir ôté les fractions, & ce qui ſe détruit, $4aaxx - 4abxy + 2bbyy + 4aarx = 0$, ou $xx - \frac{bxy}{a} + ex + \frac{bbyy}{2aa} = 0$, qui eſt l'équation que l'on a à conſtruire C. Q. F. D.

REMARQUE.

5. Si l'on mene RN parallele à AG, la portion GN de l'Ellipſe réſoudra le Problême ſi le point N tombe entre G & S: mais s'il tombe entre S & D, ce ſera la portion GS: car les inconnues x & y qui ſont celles du Problême qu'on vient de conſtruire ont leur origine en A. Et $x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c = z$ ne ſeroit point l'expreſſion de RN, ſi le point N tomboit entre S & D.

6. Si dans la Conſtruction l'angle OPM s'étoit trouvé droit, & que dans l'équation $\frac{4ffxx}{cc} = 2gg - ff$, $2g = c$, le lieu auroit été au cercle. Ce qui eſt évident; car cette équation ſeroit devenue $zz = 2gg - ff$.

CONSTRUCTION.

Des Equations, ou des lieux à l'Hyperbole par rapport à ſes diametres.

PROBLÊME INDE'TERMINE'.

FIG. 82. XXI. *UN angle droit* HAG, *& un point fixe* B *étant donnez de poſition ſur un Plan. Il faut trouver le point* M *dans cet angle, d'où ayant mené* MF *parallele à* AB *&* MB *du point* M *au point fixe* B, MF *ſoit à* MB *dans la raiſon donnée de* m *à* n.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, l'on menera MP parallele à AH, & en nommant la donnée AB, a; & les indéterminées AP, ou FM, x; PM, ou AF, y; BP ſera $x - a$; & les qualitez du problême donneront $m.n :: FM(x).MB = \frac{nx}{m}$, & à cauſe du triangle rectangle BPM, l'on aura $xx - 2ax + aa + yy = \frac{nnxx}{mm}$, ou $mmxx - 2mmax + mmaa + mmyy = nnxx$, qui eſt encore une équation generale pour les trois Sections coniques, comme celle

celle de l'art. 19 n°. 3 : car si l'on fait $m = n$, l'on aura $aa - 2ax + yy = 0$, qui est une équation à la parabole ; si l'on suppose que m surpasse n, l'on aura $xx - \frac{2mmax + mmaa + mmyy}{mm - nn} = 0$.

Et enfin si l'on suppose que m soit moindre que n, l'on aura $xx + \frac{2mmax - mmaa - mmyy}{nn - mm} = 0$ qui est une équation à l'Hyperbole par raport à ses axes, à cause de l'angle droit BPM, mais parceque xx a un second terme ; l'origine des indéterminées x & y n'est point au centre. Pour la ramener à l'état de celle de l'art. 14 n°. 12, l'on fera évanouir le second terme en faisant $x + \frac{mma}{nn - mm} = z$; & l'on aura $zz - \frac{m^4aa}{n^4 - 2mmnn + m^4} - \frac{mmaa - mmyy}{nn - mm} = 0$, & en multipliant le numerateur & le dénominateur du terme $- \frac{mmaa}{nn - mm}$ par $nn - mm$ pour lui donner le même dénominateur que celui de la fraction qui le précede, & ôtant ce qui se détruit l'on aura $zz - \frac{mmnnaa}{n^4 - 2mmnn + m^4} = \frac{mmyy}{nn + mm}$, où les inconnues z & y ont à present leur origine au centre de l'Hyperbole. Pour le trouver, soit prolongée AB du côté de A en C en sorte que $AC = \frac{mma}{nn - mm}$ le point C sera le centre cherché. Et ayant fait $CD = \frac{mna}{nn - mm}$, qui est la racine du terme connu de l'équation, CD sera le demi axe de l'Hyperbole, & D son sommet. Si l'on fait presentement $nn - mm :: \frac{mmnnaa}{n^4 - 2mmnn + m^4} \cdot \frac{nnaa}{nn - mm}$; $\frac{na}{\sqrt{nn - mm}}$ exprimera le demi diametre conjugué au demi diametre CD ; soit donc menée par le centre C la ligne CK parallele à PM & égale $\frac{na}{\sqrt{nn - mm}}$, elle sera le demi axe conjugué à CD. Il est aisé d'achever (art. 14 n°. 30), & de décri-

re par la premiere Propoſition du même article, l'Hyperbole AM qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur l'Hyperbole la droite MP perpendiculaire à CG, l'on aura (art. 14 n°. 13) $CP^2 - CD^2 . PM^2 :: CD^2 . CK^2$: ce qui eſt en termes algebriques $zz - \frac{mmnnaa}{n^4 - 2mmnn + m^4} . yy ::$ $\frac{mmnnaa}{n^4 - 2mmnn + m^4} . \frac{nnaa}{nn - mm} :: \frac{mm}{nn - mm} . 1$, d'où l'on tire aprés les réductions $nnzz - mmzz - \frac{mmnnaa}{nn - mm} = mmyy$, ou $xx + \frac{2mmax - mmaa - mmyy}{nn - mm} = 0$, en mettant pour zz ſa valeur tirée de la réduction $x + \frac{mma}{nn - mm} = z$, & en réduiſant l'équation. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDE'TERMINE'.

FIG. 83. 1. *DEUX lignes* AH, BG *dont les extremitez* A *&* B *ſont fixes, étant données; il faut trouver entre ces deux lignes un point* M, *par où & par le point* A, *ayant mené la ligne* AMD, *qui rencontre* BG *en* D; *& la ligne* PME *parallele à* AB, *qui joint les points* A *&* B; PM *ſoit à* ED *dans la raiſon donnée de* m *à* n.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée AB, ou PE, a; & les inconnues AP, x; & PM, y; ME ſera $a - y$, & les triangles ſemblables MPA, MED donneront $MP\ (y) . PA\ (x) :: ME\ (a - y) . ED = \frac{ax - xy}{y}$, & les qualitez du Problême donnent $y . \frac{ax - xy}{y} :: m . n$, d'où l'on tire $yy + \frac{mxy - max}{n} = 0$, qui eſt une équation à l'Hyperbole.

Pour la réduire & pour la conſtruire, je fais $y + \frac{mx}{2n} = u$, & l'équation devient $uu - \frac{mmxx}{4nn} - \frac{max}{n} = o$, & comme cette réduction a fait naître un premier terme $\frac{mmxx}{4nn}$ dont le ſecond eſt $\frac{max}{n}$, il faut encore faire évanouir $\frac{max}{n}$. Pour ce ſujet afin d'avoir xx délivré de toute quantité donnée, je multiplie toute l'équation par $4nn$, & je la diviſe par mm, ce qui la change en celle-ci $\frac{4nnuu}{mm} = xx + \frac{4nax}{m}$; & faiſant $x + \frac{2na}{m} = z$, l'on a l'équation réduite $\frac{4nnuu}{mm} = zz - \frac{4nnaa}{mm}$, d'où l'on tire cette Conſtruction.

Le point A étant l'origine des inconnues x qui va vers H, & y qui va vers B; à cauſe de la ſeconde réduction $x + \frac{2na}{m} = z$, ſoit prolongée PA en K, en ſorte que $AK = \frac{2na}{m}$; le point K ſera l'origine de z qui va toujours vers H, & de y qui, ayant mené KO parallele à AB, va vers O: & à cauſe de la premiere réduction $y + \frac{mx}{2n} = u$; ſoit priſe $KO = \frac{mAK}{2n} = a$, en mettant pour AK ſa valeur $\frac{2na}{m}$, & du point O par A ayant mené OAC qui recontrera MP prolongée en C, MC ſera $= y + \frac{mx}{2n} = z$: car à cauſe des triangles ſemblables AKO, APC, l'on aura $AK\left(\frac{2na}{m}\right) . KO\ (a) :: AP\ (x) . PC = \frac{mx}{2n}$; & partant $PM + PC = y + \frac{mx}{2n}$; de ſorte que O

eſt le centre de l'Hyperbole, & l'origine des inconnues z qui va vers G (car le point O eſt dans le prolongement de GB à cauſe de $KO = AB$) & y qui demeure toujours parallele à AB : Mais les coordonnées de l'Hyperbole ſont preſentement OC, & CM en ſuppoſant l'Hyperbole décrite ; c'eſt pourquoi l'expreſſion de OC ſe doit trouver dans l'équation réduite auſſi-bien que celle de CM (u) : au contraire celle de KP. (z) ne doit plus s'y rencontrer ; il faut donc trouver une équation qui renferme l'expreſſion de KP (z) & de OC, afin de faire évanouir z de l'équation réduite, & d'introduire en ſa place celle de OC.

Pour ce ſujet, ayant nommé les données AK (Conſt.) $\frac{2na}{m}$; AO, d ; & l'indéterminée OC, f ; l'on aura à cauſe des triangles ſemblables KAO, PAC, $AK . AO :: KP . OC$, ou en termes algebriques $\frac{2na}{m} . d :: z . f$; donc $dz = \frac{2naf}{m}$, ou $z = \frac{2af}{md}$, ou $zz = \frac{4nnaaff}{mmdd}$; mettant donc dans l'équation réduite en la place de zz ſa valeur que l'on vient de trouver, l'on aura $\frac{4nnuu}{mm} = \frac{4nnaaff}{mmdd} - \frac{4naa}{mm}$, ou en réduiſant, $\frac{ddnn}{aa} = ff - dd$, & l'on décrira (art. 14 n°. 30) par le moyen de cette équation, l'Hyperbole AM qui reſoudra le Problême.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur l'Hyperbole la ligne MPC parallele à BA, l'on aura par la proprieté de l'Hyperb. $AK^2 . KO^2 :: OC^2 - OA^2 . CM^2$, ou $dd . aa :: ff - dd . uu$, d'où l'on tire $\frac{ddnn}{aa} = ff - dd$, ou $yy + \frac{mxy}{n} - \frac{max}{n} = 0$, & remettant pour ff, pour uu & pour zz leurs valeurs tirées des équations précedentes, & réduiſant. *C. Q. F. D.*

PROBLÈME INDÉTERMINÉ.

2. *Il faut trouver dans un triangle donné* ABC *un point* M, *par où ayant mené une ligne* DME *parallele à un des côtez* AC, *& du point* A *par le même point* M, *la ligne* AMF, *qui rencontre* BC *en* F; BF *soit à* BD *dans la raiſon donnée de* m *à* n. FIG. 84.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, ſoit menée *MG* parallele à *BC*, & nommé les données *AB*, *a*; *BC*, *b*; & les inconnues *AG*, *x*; *GM*, *y*; *GB* ſera, $a - x$; & les triangles ſemblables *AGM*. & *ABF*, *CBA* & *MGD*, donneront $AG(x).GM.(y) :: AB(a).BF = \frac{ay}{x}$, & $CB(b)\ BA(a) :: MG(y).GD = \frac{ay}{b}$; donc $BD = a - x + \frac{ay}{b}$, & par les qualitez du Problême, l'on a $m.n :: \frac{ay}{x}(BF).a - x + \frac{ay}{b}(BD)$, d'où l'on tire $xx - \frac{axy}{b} - ax + \frac{nay}{m} = o$, qui eſt une équation à l'Hyperbole, & qui montre que la même Hyperbole doit paſſer par les points *A* & *B*: car ſi l'on fait $x = o$, l'on aura auſſi $y = o$; d'où il ſuit que les points *G* & *M* ſe confondent avec le point *A*, qui par conſequent eſt un des points de l'Hyperbole; & ſi l'on fait $y = o$, l'on aura $x = a$ qui fait connoître que le point *G* tombant en *B*, le point *M* y tombe auſſi; & par conſequent le point *B* eſt un des points de l'Hyperbole. Pour réduire cette équation, on fera $x - \frac{ay}{2b} - \frac{1}{2}a = z$, & l'on en tirera $\frac{4bbzz}{aa} = yy + aby - \frac{4nbbz}{ma} + bb$, & faiſant encore $y + b - \frac{2nbb}{ma} = u$, l'on aura l'équation toute réduite $\frac{4bbzz}{aa} = uu + \frac{4mmab^3 - 4mnb^4}{mmaa}$, qui avec les réductions donnent cette conſtruction.

Ayant mené AK parallelele à BC, A étant l'origine des inconnues x qui va vers B & y qui va vers K; à cauſe de la ſeconde réduction $y + b - \frac{2nbb}{ma} = u$, ſoit priſe $AK = b - \frac{2nbb}{ma}$; K ſera l'origine des inconnues u qui va ſur AK de côté d'autre de K, & x parallelele à AB. Et ayant diviſé AB par le milieu en I, & mené IC; à cauſe de la premiere réduction $x = -\frac{ny}{2b} - \frac{1}{2}a = z$, ſoit menée KO parallele à AB qui rencontrera IC prolongée s'il eſt neceſſaire en O, le point O ſera l'origine des inconnues z qui va de part & d'autre du point O parallele à AB, & u, qui va de part & d'autre du point O parallele à BC, ou à AK: car ayant mené AL parallele à IO qui rencontre KO en L; LO ſera égale à $AI = \frac{1}{2}a$; & à cauſe des triangles ſemblables CBI, AKL, l'on a $CB\,(b) . BI\left(\frac{1}{2}a\right) :: AK\,(y) . KL = \frac{ny}{2b}$, & partant $KO = \frac{ny}{2b} + \frac{1}{2}a$.

Mais parceque ayant mené MP parallele à AB, & prolongé GM en S, les coordonnées de l'Hyperbole qui doit être le lieu où ſe doivent trouver tous les points M, ſont preſentement OP & PM; c'eſt pourquoi il faut introduire dans l'équation réduite l'expreſſion de OP que je nomme f, & faire évanouir celle de SM qui eſt u. Pour y parvenir, je nomme la donnée CI, d; & à cauſe des paralleles BI, PM & OS, l'on a $CB . IC :: MS . OP$ ou $b . d :: u . f$; & partant $u = \frac{bf}{d}$ & $uu = \frac{bbff}{dd}$; mettant donc dans l'équation réduite en la place de uu ſa valeur $\frac{bbff}{dd}$ que l'on vient de trouver, l'on aura $\frac{4ddxx}{aa} = ff + \frac{4mnabdd - 4nnbbdd}{mmaa}$, qui ſervira à déterminer les demi diametres conjuguez OR, & OT ſur OP & OK, & l'on décrira (art. 14 n°. 30) l'Hy-

perbole *AMB* qui réſoudra le Problême.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt ſemblable à celle des Propoſitions préceden-tes.

CONSTRUCTION.

Des Equations ou des lieux à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes.

PROBLÊME INDE'TERMINE'.

XXII. *DEUX lignes paralleles* AH, BG, *dont les extremitez* A *&* B *ſont fixes, étant données de poſition ſur un Plan; ſoit une autre ligne* CD *menée librement perpendiculaire aux paralleles. Il faut trouver ſur* CD *le point* M, *en ſorte que ayant mené des points* A *&* B *les droites* AM, *&* BM, *l'angle* AMC *ſoit égal à l'angle* BMD *dans toutes les poſitions de* CD *parallele à elle-même.* FIG. 85.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, ſoit menée *BE* parallele à *CD*, & nommé les données *BE*, ou *DC*, *a*; *AE*, *b*; & les indéterminées *BD*, ou *EC*, *x*; *DM*, *y*; *AC* ſera $b+x$; & *CM*, $a-y$. Puiſque par la conſtruction les angles *ACM*, *BDM* ſont droits, & par l'Hypotheſe, l'angle *AMC* égal à l'angle *BMD*, les triangles *ACM*, *BDM* ſeront ſemblables; c'eſt pourquoi l'on aura *AC*. *CM* :: *BD*. *DM*, ou en termes algebriques, $b+x.a-y::x.y$; donc $ay+xy=ax-xy$, ou $\frac{1}{2}by+xy=\frac{1}{2}ax$ (en diviſant par 2. pour délivrer le produit des inconnues de toute quantité connue) qui eſt une équation à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, puiſque aucune des deux inconnues, n'eſt élevée au quarré, & qu'elles ſont multipliées l'une par l'autre comme dans celle de l'art. 14 n° 4. Mais parceque cette équation contient trois termes, il ſuit (art. 14 n° 4) que le point *B*

qui eſt l'origine des inconnues x & y, n'eſt point le ſommet de l'angle des aſymptotes. Pour le trouver & déterminer la poſition des aſymptotes, il faut réduire l'équation en changeant les produits compoſez en produits ſimples. Faiſant donc $\frac{1}{2}b + x = z$, l'on aura $x = z - \frac{1}{2}b$, & mettant dans l'équation en la place de x ſa valeur $z - \frac{1}{2}b$, l'on en tirera $\frac{1}{2}az - yz = \frac{1}{4}ab$, & faiſant encore $\frac{1}{2}a - y = z$, l'on aura $y = \frac{1}{2}a - z$, & mettant cette valeur de y dans l'équation précedente, l'on aura $uz = \frac{1}{4}ab$, où les inconnues u & z, ont (art. 14) leur origine au ſommet de l'angle des aſymptotes. Les deux réductions précedentes, & l'équation réduite fourniſſent cette conſtruction.

A cauſe de la premiere réduction $x + \frac{1}{2}b = z$, on prolongera DB en I en ſorte que $BI = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}b$, & ayant mené IK parallele à BE, le point I ſera l'origine des inconnues z qui va (art. 16 n° 1) vers G, & y qui va vers K. A cauſe de la ſeconde réduction $\frac{1}{2}a - y = u$, on prendra $AK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}a$, & ayant mené KO parallele à AH, ou à BG, le point K ſera l'origine des inconnues z qui va vers O, & u qui va (art. 16 n° 4) vers I, & le ſommet de l'angle des aſymptotes KI & KO, puiſque l'équation $uz = \frac{1}{4}ab$ n'a que deux termes; comme celle de l'art. 14. On voit par l'équation $uz = \frac{1}{4}ab$, que l'Hyperbole doit paſſer par le point B,

puiſque

puiſque $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b = KI \times IB$. On décrira donc (art. 14) par le point B, entre les aſymptotes KO, KI, l'Hyperbole BM qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque M pris ſur l'Hyperbole, les lignes CMD & MP paralleles à BE & à KO; l'on aura (art. 14), $KI \times IB = KP \times PM$, ou en termes algebriques, $uz = \frac{1}{4}ab$, ou $\frac{1}{2}by + xy = \frac{1}{2}ax$, en remettant pour z & pour u leurs valeurs tirées des réductions. *C. Q. F. D.*

1. Si dans cette équation on fait $b = 0$, le point A ſe confondra avec le point E, & l'on aura $y = \frac{1}{2}a$, qui eſt une équation à la ligne droite, & qui montre que le point M ſe trouvera ſur la ligne KO qui partage EB, & CD par le milieu.

PROBLÊME INDE'TERMINE'.

3. *UN angle* GAH, *& un point* C, *étant donnez de poſition ſur un Plan. Si l'on mene du point* C *une infinité de lignes droites comme* CDB, *qui rencontrent les lignes* AG, AH *aux points* D *&* B, *& que l'on prenne ſur chaque* CDB *un point* M, *en ſorte que* CM *ſoit toujours à* DB *dans la raiſon donnée de* m *à* n. *Il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe qui paſſe par tous les points* M. FIG. 86.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, on menera par le point donné C & par le cherché M, les lignes CI, MK paralleles à AH, qui rencontreront GA prolongée en I & en K: & ayant nommé les données AI, a; IC, b; & les inconnues IK, x; KM, y; AK ſera $a - x$; & les qualitez du Problême donneront $m . n :: IK\ (x) . AB = \frac{nx}{m}$: car à cauſe des paralleles, $IK . AB :: CM . DB$,

donc $KB = a - x + \frac{nx}{m}$, & $IB = a + \frac{nx}{m}$; & à cauſe des triangles ſemblables CIB, MKB, l'on aura $b\,(IC).\ a + \frac{nx}{m}\,(IB) :: y\,(KM).\ a - x + \frac{nx}{m}\,(KB)$; d'où l'on tire $\frac{mab - mbx + nbx}{m} = \frac{may}{m} + xy$, qui eſt une équation à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, qu'il faut réduire pour en déterminer la poſition. Faiſant donc $\frac{mx}{n} + x = z$, l'on a $x = z - \frac{ma}{m}$; & mettant cette valeur de x dans l'équation, l'on aura, après avoir ôté ce qui ſe détruit, en tranſpoſant, $\frac{mmab}{mn} = zy + \frac{mbz}{n} - bz$; & faiſant encore $y + \frac{mb}{n} - b = u$, l'on aura $\frac{mmab}{mn} = zu$, où les inconnues u & z ont leur origine au ſommet de l'angle des aſymptotes. L'équation réduite & les réductions fourniſſent la conſtruction ſuivante.

A cauſe de la premiere réduction $\frac{ma}{n} + x = z$, l'on prolongera AI en O, en ſorte que $IO = \frac{ma}{n}$, & l'on menera OQ parallele à IC; à cauſe de la ſeconde réduction $y + \frac{mb}{n} - b = u$, en ſuppoſant que m ſurpaſſe n, l'on prolongera OQ du coté de O en R, en ſorte que $OR = \frac{mb}{n} - b$; & ayant mené RS parallele à IB, les lignes RQ, RS ſeront les aſymptotes, & R l'origine des inconnues z qui va vers S, & u qui va vers Q. Si l'on prolonge CI en F, FC ſera (conſt.) $\frac{mb}{n} - b + b = \frac{mb}{n}$, & OI ou RF étant (conſt.) $= \frac{ma}{n}$; l'on aura $RF \times FC = \frac{mmab}{mn}$; c'eſt pourquoi l'Hyperbole qui ſatisfait au Problême paſſera par le

point C. On la décrira par l'article 14.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque *M* pris ſur l'Hyperbole, la ligne *MKP* parallele à *RQ*, l'on aura par la proprieté de l'Hyperbole $RP \times PM = RF \times FC$, ce qui eſt en termes algebriques $ux = \frac{mmab}{bm}$, ou $\frac{mab - mbx + nbx}{b} = \frac{may}{b} + xy$, en remettant pour *x* & pour *u* leurs valeurs tirées des réductions. C. Q. F. D.

3. Si $m = n$, la ligne *RS* ſe confondroit avec *OB*, & *IO* ſeroit égale à *IA*; car l'équation à réduire deviendroit $ab = ay + xy$, & la premiere réduction ſeroit $u + x = x$, & il n'y en auroit point de ſeconde.

PROBLEME INDE'TERMINE'.

4. *DEUX lignes droites* AG, BH, *dont les extremitez* A & B *ſont fixes, & qui étant prolongées concourrent en un point* C, *étant données de poſition. Soit une autre ligne* DE *menée librement de l'une à l'autre parallele à une ligne donnée de poſition. Il faut déterminer ſur* DE, *le point* M, *en ſorte qu'ayant mené* AM *&* BM, *l'angle* DAM *ſoit toujours égal à l'angle* EBM. Fig. 87.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, on menera *BK* parallele à *DE*, & ayant diviſé l'angle *ACB* en deux également par la ligne *CO*, on menera par les points *A* & *B* les lignes *AF* & *BI* paralleles à *CO*, qui rencontreront *DE* en *F* & en *I*, & *KB* en *L*. Ces paralleles ſeront données de poſition, & *KL*, *LB* ou *FI* & *AL* ſeront données de grandeur. Or puiſque par la conſt. les angles *DAF*, *EBI* ſont égaux, le Problême ſe réduit à trouver ſur *FI* le point *M*, en ſorte que l'angle *FAM* ſoit égal à l'angle *IBM*. Pour en venir à bout, ſoient menées *FP* qui faſſe avec *AF* l'angle *AFP* = *AFD*, ou *BIM*, & qui rencontre *BI* en *P*, & *MN* parallele à *FB*. Il eſt clair que les triangles *FIP*, *MNI* ſeront iſoſceles,

car les angles $AFD + AFM = 2$ droits $=$ (conſt.) $AFP + AFM = AFM + MFP + FIP = MFP + FIP + IPF$ donc $AFM = IPF = FIP$. Et parceque le triangle FIP demeure toujours le même, puiſque la ligne FI demeure toujours parallele à elle-même, ſes côtez ſeront donnez de grandeur; & les triangles AFM, BNM ſeront ſemblables.

Nommant donc les données LB, ou FI, a; AL, b; IP, c; & les inconnues FM, x; LF, ou BI, y; MI ou MN ſera $a - x$, & AF, $b + y$; & les triangles ſemblables FIP, MIN donneront $FI\ (a) . IP\ (c) :: MI\ (a - x) . IN = \frac{ac - cx}{a}$; donc $BN = y + \frac{ac - cx}{a}$; & à cauſe des triangles ſemblables, $AF . FM :: BN . NM$, ou en termes algebriques, $b + y . x :: y + \frac{ac - cx}{a} . a - x$; d'où l'on tire $aab + aay - abx - 2axy = acx - cxx$, qui eſt une équation à l'Hyperbole, que l'on peut regarder, ou par rapport à ſes diametres, ou par rapport à ſes aſymptotes: mais comme on en a conſtruit de ſemblables dans l'article precedent, en réduiſant les équations aux diametres, on conſtruira celle-ci en la réduiſant aux aſymptotes ſelon l'article 15 n°. 14. L'on a en tranſpoſant & diviſant par $2a$, $\frac{aab + cxx - abx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2}ay$, & faiſant $x - \frac{1}{2}a = z$, l'équation ſe réduit à celle-ci $\frac{\frac{1}{2}aab + czz - \frac{1}{4}aac - abz}{2a} = yz$, ou $\frac{12}{4}ab - \frac{1}{8}ac = yz + \frac{1}{2}bz - \frac{czz}{2a}$, en ſuppoſant que b ſurpaſſe $\frac{1}{2}c$; & faiſant encore $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a} = u$, l'on aura l'équation réduite $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = uz$, qui appartient à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, & où les inconnues u & z ont leur origine au ſommet de leur angle. Les réductions

& l'équation réduite donnent cette conſtruction.

Le point L étant l'origine des inconnus x qui va vers B, & y qui va vers F ; à cauſe de la premiere réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, on diviſera LB par le milieu en R, & le point R ſera l'origine de z qui va vers B, & y qui va vers Q, ayant mené RQ parallele à BP ; à cauſe de la ſeconde réduction $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a} = u$, on prolongera QR en S, en ſorte que $RS = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}LA$, & ayant mené ST parallele à RB, le point S ſera l'origine des inconnues z qui va vers T, & u qui va vers Q, & le ſommet de l'angle des aſymptotes qui ſeroient SQ & ST, ſi la ſeconde réduction étoit $y + \frac{1}{2}b = u$: mais elle eſt $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a} = u$; c'eſt pourquoi ſoit prolongée IB du côté de B, qui rencontrera ST en V, & ayant fait $VY = \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}IP$, ſoit menée SY, & du point M la ligne MX parallele à IB, qui rencontrera ST en X, & SY en Z, & ZX ſera $\frac{cz}{2a}$: car $SV\left(\frac{1}{2}a\right).VY.\left(\frac{1}{4}c\right) :: SX(z).XZ = \frac{cz}{2a}$; & partant $MZ\,(u) = y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a}$, & $BY = \frac{1}{2}b - \frac{c}{2a}$, & alors les lignes SQ & SY ſeront les aſymptotes ; & par conſéquent SZ & ZM, les coordonnées.

Il n'eſt pas cependant neceſſaire de faire évanouir l'expreſſion de $SX = z$ de l'équation réduite, pour introduire en ſa place celle de SZ : car 1°, Soit qu'on le faſſe ou non, on trouvera par le moyen de l'équation réduite, que l'Hyperbole doit toujours paſſer par le même point : comme en ce cas, où l'équation réduite eſt $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = uz$; le terme connu $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c$

$\times \frac{1}{2} a = BY \times SV$, fait connoître (art. 14. n°. 12) que l'Hyperbole doit passer par le point B; & si l'on nomme SY, d; & SZ, f; pour introduire l'expression SZ dans l'équation réduite en la place de celle de SX, l'on aura à cause des triangles semblables SVY, SXZ, $SV . SY :: SX . SZ$, ou en termes algebriques $\frac{1}{2} a . d :: z . f$, d'où l'on tire $z = \frac{af}{2d}$, & mettant dans l'équation réduite $\frac{1}{4} ab - \frac{1}{8} ac = uz$, en la place de z sa valeur $\frac{af}{2d}$, l'on aura $\frac{1}{2} bd - \frac{1}{4} cd = fu$, dont le terme connu $\frac{1}{2} bd - \frac{1}{4} cd = \frac{1}{2} b - \frac{1}{4} c \times d = BY \times SY$, montre comme auparavant, que l'Hyperbole doit passer par le point B. Ce que l'on connoît aussi par l'équation à réduire $aab + aay - abx - 2axy = acx - cxx$: car faisant $x = a$, afin que le point M tombe en B, l'on aura $aab + aay - aab - 2aay = aac - aac$, d'où l'on tire $y = 0$; d'où il suit que l'Hyperbole passe par le point B, puisque BI s'y anéantit.

2°. Le rectangle $SV \times BY$, ou $RB \times BY$ étant égal à $SQ \times SX$, le rectangle $SY \times BY$ sera (art. 14 n° 6) égal au rectangle $SQ \times SZ$; d'où l'on voit qu'il est en quelque façon plus simple de réduire ces sortes d'équations aux asymptotes de l'Hyperbole que de les réduire aux diametres. Si donc l'on décrit par le point B entre les asymptotes SQ, SY l'Hyperbole BM, elle satisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris sur l'Hyperbole la droite MZX parallele à QS; par la proprieté de l'Hyperbole (art. 14 n° 6), l'on a $SV \times BY = SX \times MZ$, ou en termes algebriques $\frac{1}{4} ab - \frac{1}{8} ac =$

ux, d'où l'on tire $aab + cxx - acx - abx = 2axy - aay$, en remettant pour u & pour z, leurs valeurs. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

5. Si les paralleles AF, BI étoient perpendiculaires à DE, les points P & N se confondroient avec le point I, & $IP = c$ deviendroit nulle ou $= 0$; c'est pourquoi il faudroit effacer tous les termes où c se trouve dans l'équation à réduire $aab + cxx - acx - abx = 2axy - aay$, & l'on auroit, $ab - bx = 2xy - ay$, que l'on construiroit comme celle du premier Problême de cet article.

COROLLAIRE II.

6. Si outre cela le point A tomboit en K, $AL = b$ deviendroit nulle, & l'on auroit $x = \frac{1}{2}a$, en effaçant tous les termes où b se rencontre dans l'équation $ab - bx = 2xy - ay$, & le point M se trouveroit dans la ligne droite RQ menée par le milieu de KB parallele à IB.

COROLLAIRE III.

7. Les choses étant supposées comme dans l'énoncé du Problême n°. 4. Si $2AL = IP$, ou $2b = c$ dans l'équation réduite $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = zu$, l'on aura $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{8}ac$, & partant $zu = 0$; d'où il suit qu'en ce cas l'Hyperbole se confond avec ses asymptotes, & que par conséquent le point M se trouvera dans la ligne RQ qui est une des asymptotes. En effet, en ce cas l'équation à réduire devient $aab + 2bxx - 3abx - 2axy + aay = 0$, en mettant $2b$ en la place de c, qui étant divisée par $2x - a = 0$, il vient $bx - ab - ay = 0$; & l'équation $2x - a = 0$, donne $x = \frac{1}{2}a$, qui montre que le point

M ſe trouve dans la ligne RQ menée par le milieu de LB parallele à AL.

COROLLAIRE IV.

8. ENFIN ſi $2AL$ eſt moindre que IP, ou que le point A, ſe confonde avec le point K, ou qu'il ſe trouve au deſſous de K, l'Hyperbole ſe trouvera de l'autre côté de RQ, & paſſera par le point A: car dans l'équation réduite $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = uz$, $\frac{1}{8}ac$ ſurpaſſera $\frac{1}{4}ab$ dans le premier cas; $\frac{1}{4}ab$ ſera nulle ou $= o$ dans le ſecond; & dans le troiſiéme, b deviendra negative de poſitive qu'elle étoit. Ainſi la quantité $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac$ ſera toujours negative, & partant l'Hyperbole ſe trouvera de l'autre côté de RQ.

REMARQUES.

9. LORSQU'ON veut réduire ces ſortes d'équations à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, il faut obſerver 1°. Que ſi la lettre inconnue qui n'eſt point quarrée dans l'équation, ſe trouve multipliée par une quantité connue dans quelqu'un de ſes termes, autre que dans celui où elle ſe trouve multipliée par l'inconnue qui eſt quarrée, il faut mettre tous les termes où l'inconnue qui n'eſt point quarrée ſe trouve dans un des membres de l'équation, & tous les autres termes dans l'autre, & faire la premiere réduction ſur le membre où l'inconnue qui n'eſt point quarrée ſe trouve.

2°. Dans la ſeconde réduction (qui ſeroit la ſeule, ſi la lettre inconnue qui n'eſt point quarrée ne ſe trouvoit point ſeule dans quelque terme de l'équation) la lettre inconnue qui n'eſt point quarrée doit toujours être poſitive.

3°, Dans l'une & l'autre réduction, l'inconnue qui n'eſt point quarrée, doit toujours être délivrée de toute quantité connue.

4°.

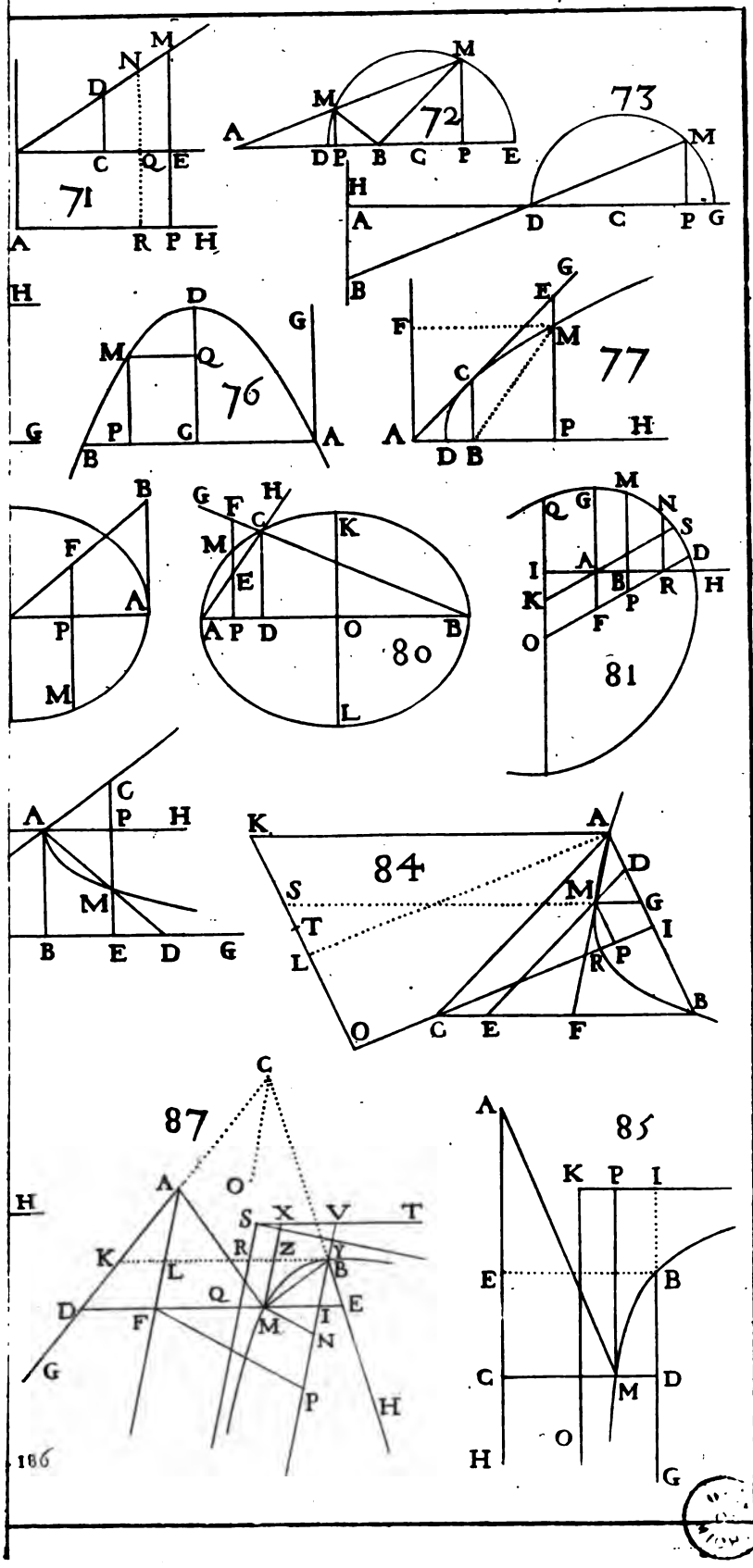
4°. Quand on ne veut point ſe donner la peine de faire toutes ces réflexions, il n'y a qu'à réduire ces équations à l'Hyperbole, en les regardant par rapport à ſes diametres, où il n'y a aucune précaution à prendre. Il faut éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE

10. SOIT l'équation $\frac{aab + cxx - abx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2}ay$, qui eſt celle que l'on vient de conſtruire. Si on ſuppoſe que le point A tombe en K, $AL = b$ deviendra nulle ou $= 0$; c'eſt pourquoi en effaçant tous les termes où b ſe rencontre, l'on aura $\frac{cxx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2}ay$ que l'on ſe propoſe de réduire à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, & dont les termes ſont diſpoſez dans l'un & l'autre membre de l'équation ſelon ce qui eſt dit dans le premier cas de la remarque précedente.

Faiſant donc $x - \frac{1}{2}a = z$, l'on réduira l'équation à celle-ci $czz - 2ayz = \frac{1}{4}aac$, ou $\frac{czz}{2a} - yz = \frac{1}{8}ac$. Il faudroit pour faire la ſeconde réduction prendre $\frac{cz}{2a} - = u$; mais parceque l'inconnue y qui n'eſt point quarrée dans l'équation à réduire ſe trouve negative dans cette ſeconde réduction, & qu'elle y doit être poſitive, les réductions que l'on vient de faire ne ſerviront de rien. Il faut donc changer les ſignes de tous les termes de l'équation pour la réduire de nouveau, & l'on aura $\frac{acx - cxy}{2a} = \frac{1}{2}ay - xy$; & en faiſant $\frac{1}{2}a - x = z$, l'on réduira l'équation à celle-ci $\frac{1}{8}ac = zy + \frac{2czz}{2a}$, & faiſant $y + \frac{cz}{2a} = u$, l'on aura $\frac{1}{8}ac = zu$. Les réductions & l'équation réduite ſerviront à décrire l'Hyperbole, qui paſſe-

ra par le point K ou A qui (Hyp.) ne font qu'un même point. On voit encore par l'équation à réduire que l'Hyperbole doit paſſer par le point K : car ſi l'on fait $x = 0$, l'on aura auſſi $y = 0$, d'où il ſuit que les coordonnées s'aneantiſſent au point K.


71
72
73
76
77
80
81
84
85
87
186

SECTION IX.

Où l'on donne la Méthode de conſtruire les Problêmes Solides déterminez par le moyen de deux équations locales, ou indéterminées, lorſque l'une des deux ſe rapporte au cercle, ou y peut être ramenée.

METHODE.

XXIII. LEs inconnues de ces deux équations étant les mêmes, elles auront leur origine en un même point; & ayant conſtruit ces deux équations l'une aprés l'autre par les regles de la Section précedente, les points où les courbes auſquelles elles appartiennent ſe couperont, réſoudront les Problêmes, comme on va voir par les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

Problême Solide.

I. *UN demi cercle* AMB *dont le diametre eſt* AB, *& le centre* C, *& une ligne* GH *perpendiculaire à* AB, *étant donnez de poſition. Il faut trouver ſur la circonference le point* M, *par où ayant mené du centre* C, *la droite* CME, *qui rencontre* GH *en* E, *& par le même point* M, *la droite* MH *parallele à* AB, *qui rencontre la même* GH *en* H; HE *ſoit égale au demi diametre* CB *du cercle donné, ou à une autre ligne donnée.* FIG. 88.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, on abaiſſera du point *M* ſur *AB* la perpendiculaire *MP*; & ayant nommé les données *CB*, ou *CM*, ou (Hyp.) *HE*, *a*;

BG, b ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; PG, ou MH ſera $a + b - x$, & les triangles ſemblables CPM, MHE, donneront $x, (CP) . y (PM) :: a + b - x (MH) . (HE)$, d'où l'on tire $ax = ay + by - xy$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes. Et à cauſe du triangle rectangle CPM, l'on aura $xx + yy = aa$ qui eſt une équation au cercle.

Si l'on fait preſentement évanouir l'inconnue y, l'on aura aprés avoir ordonné l'équation,

$$x^4 - 2ax^3 + aaxx + 2a^3x - a^4$$
$$- 2b + 2ab + 2aab - 2a^3b = 0$$
$$+ bb \qquad - aabb$$

Et ſi l'on fait évanouir x, (car il eſt à propos de faire évanouir les deux inconnues l'une aprés l'autre, pour voir ſi d'une maniere l'équation qui en réſulte n'eſt pas plus ſimple que celle qui réſulte de l'autre) l'on aura.

$$y4 + 2ay^3 + aayy - 2a^3y - a^4 = 0$$
$$+ 2ab$$
$$+ bb$$

qui paroît plus ſimple que la précedente. Mais comme ces deux équations ſont du quatriéme degré, & qu'on ne peut, ni par la diviſion, ni par la transformation, les réduire à une équation du ſecond ; il ſuit que le Problême eſt ſolide, & parceque l'une des deux équations indéterminées appartient au cercle, on le conſtruira par leur moyen en cette ſorte.

Il eſt clair que l'équation $xx + yy = aa$, appartient au cercle donné AMB ; c'eſt pourquoi il n'y a qu'à conſtruire l'équation à l'Hyperbole $ax = ay + by - xy$; faiſant donc pour la réduire $a + b - x = z$, l'on aura $x = a + b - z$; & mettant cette valeur de x dans l'équation, elle deviendra $aa + ab - az = yz$, ou $aa + ab = yz + az$; & faiſant encore $y + a = u$, l'on aura l'équation réduite $aa + ab = uz$, qui fournit avec les réductions cette conſtruction.

Le point C étant l'origine des inconnues x qui va vers G, & y parallele à GH ; à cauſe de la premiere rédu-

ction $a + b - x = z$, le point G ſera (art. 16 nº 4) l'origine de z qui revient vers C. A cauſe de la ſeconde réduction $y + a = u$, on prolongera HG, en O, & ayant fait $GO = a = CB$; le point O ſera l'origine des inconnues z qui va vers L parallele à GC, & u qui va vers H, & le ſommet de l'angle des aſymptotes, qui ſeront OL & OH. Et à cauſe de l'équation réduite $aa + ab = az$, dont la quantité connue $aa + ab = a + b \times a = CG \times CB =$ (Conſt.) $CG \times GO$, l'on décrira (art. 14) par le centre C du cercle AMB, l'Hyperbole CM qui coupera le cercle au point cherché M.

DE'MONSTRATION.

AYANT prolongé MP juſqu'à l'aſymptote OL en K, & mené CL parallele à PK. Par la proprieté des aſymptotes (art. 14 nº. 1) $OL \times LC = OH \times HM$; donc $CP \times PK = PM \times MH$; donc $CP . PM :: MH . PK$. Mais à cauſe des triangles ſemblables CPM, MHE, $CP . PM :: MH . HE$; donc $MH . PK :: MH . HE$; & partant PK ($= GO =$ (Conſt.) CB) $= HE$. C. Q. F. D.

EXEMPLE II.

Problême Solide.

2. DIVISER *un arc de cercle donné* BDC, *dont le centre eſt A, & la corde* BC, *en trois parties égales* BD, DF, FC. FIG. 89.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, les cordes BD, DF, FC ſeront égales; celle du milieu DF ſera parallele à DC; le rayon AE, perpendiculaire à BC ſera auſſi perpendiculaire à DE, & les coupera toutes deux par le milieu en H & en G, & ſa partie AH compriſe entre le centre A, & la corde BC, ſera donnée de grandeur, & de poſition: mais AG & GD ou GF ſeront indéterminées. Si l'on mene encore les deux rayons AD, AF, qui rencontrent BC en I & en K; HI ſera $= HK$, & les triangles BDI, CFK ſeront égaux, ſemblables, & iſoſ-

celes ; puiſque par l'Hypotheſe l'angle $IDB = IDF = AIK = BID$. Par la même raiſon l'angle $KFC = KFD = IDF = AKI = CKF$; & qu'outre cela $BD = CF$.

Nommant donc les données AE, ou AD, ou AF, a ; HB, ou HC, b ; AH, c ; & les inconnues AG, x ; GD ou GF, y ; DF, ou DB, ou BI ſera $2y$; & partant HI, $b - 2y$.

A cauſe des triangles ſemblables AGD . AHI, l'on aura $x\,(AG) \,.\, y\,(GD) :: c\,(AH) \,.\, b - 2y\,(HI)$, d'où l'on tire $bx - 2xy = cy$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes ; & à cauſe du triangle rectangle AGD, l'on aura $xx + yy = aa$, qui eſt une équation au cercle du Problême BDC.

Si l'on fait preſentement évanouir une des deux inconnues renfermées dans les deux équations indéterminées que l'on vient de trouver, l'on aura une équation du quatriéme dégré qui ne peut être réduite à une équation du ſecond, d'où l'on doit conclure que le Problême eſt ſolide ; ainſi on le peut conſtruire par le moyen des deux mêmes équations indéterminées. Mais l'équation au cercle ſe trouve conſtruite, puiſqu'elle ſe rapporte au cercle du Problême BDC. c'eſt pourquoi il n'y a qu'à conſtruire l'équation à l'Hyperbole, qui étant réduite donne avec ſes réductions cette conſtruction.

Soit prolongée AH en L, en ſorte que $AL = \frac{1}{2} AH$, & menée par L une parallele à BC, ſur laquelle ayant pris $L0 = \frac{1}{2} HB$, l'on menera par 0 la droite $0M$ parallele à AG, qui rencontrera HB en X. L'Hyperbole AD décrite par le centre A entre les aſymptotes OL, OM, coupera l'arc BDC au point cherché D ; de ſorte que ſi l'on mene DF parallele à BC, les points D & F diviſeront l'arc BDC en trois parties égales BD, DF, FC.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené par le point D, où l'Hyperbole AD coupe l'arc BDC, la droite DN parallele à l'aſymptote OM, qui rencontrera HB en V, & LO en N, & par le centre A, le diametre gAf parallele à l'aſymptote OL, qui rencontrera OM en P, & ND en S. L'on aura à cauſe des aſymptotes OL, OD; $DN \times NO = AL \times LO$; donc $SP \times SD = SA \times AL$; donc $DS . SA :: AL . SP$: mais les triangles ſemblables DSA, AHI donnent $DS . SA :: AH, HI$; donc $AL . SP :: AH . HI$. Or (conſt.) $AH = 2AL$; donc $HI = 2SP$; & partant HV, ou $GD = 2SP + IV$, & $DF = 4SP + 2IV$: mais HX ($= HV + SP$) $= 3SP + IV$; c'eſt pourquoi $BX = $ (conſt.) $HX = 3SP + IV$; & par conſequent $BX + XI$, ou $BI = 4SP + 2IV$; donc $BI = DF = KC$. Mais les triangles ſemblables AKI, AFD donnent $AK . KI :: AF . FD$, ou (ayant mené MB, AC) $AK . KI :: AB . BI$; d'où il ſuit que l'angle $BAD = CAF = DAF$. C. Q. F. D.

Si la corde BC paſſoit par le centre A, & étoit confondue avec le diametre gAf, l'arc BC ſeroit un demi cercle, & la perpendiculaire $AH = c$, ſeroit nulle ou $= 0$; c'eſt pourquoi, en effaçant dans l'équation à l'Hyperbole, les termes où c ſe rencontre, l'on auroit $y = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} Ag$; d'où il ſuit qu'ayant diviſé Ag par le milieu en R, mené RT perpendiculaire à Ag qui coupera le demi cercle en T, & TZ parallele à gf, les arcs gT, TZ, & Zf ſeront égaux. Ce qui eſt évident.

EXEMPLE III.

Problême Solide.

3. TROUVER *deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données* KL, MN. FIG. 90.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé les don-

nées KL, a; MN, b; & les inconnues x & y; l'on aura ſuivant les termes de la queſtion $a.x :: x.y$, & $x.y :: y.b$, d'où l'on tire $ay = xx$, & $bx = yy$, qui ſont deux équations à la parabole; & faiſant évanouir l'inconnue y, l'on aura $x^3 = aab$, qui eſt une équation du troiſiéme degré, montre que le Problême eſt Solide.

Mais parceque deux équations à la parabole étant combinées par addition ou ſouſtraction, peuvent toujonrs donner une équation au cercle, attendu que l'équation à la parabole ne renferme qu'un quarré inconnu qui peut toujours être delivré de toute quantité connue; il ſuit qu'on peut conſtruire ce Problême par le moyen de l'une des deux équations précedentes, & de l'équation au cercle qui réſulte de la combinaiſon des deux mêmes équations par addition, qui eſt $ay + bx = xx + yy$.

Et parceque les deux premieres équations $ay = xx$, & $bx = yy$ ſont également ſimples, on peut indifféremment ſe ſervir de celle qu'on voudra. Prenons donc la premiere $ay = xx$. Pour la conſtruire, ſoit A l'origine des inconnues x qui va vers G, & y, qui va vers H perpendiculaire à AG; le même point A ſera auſſi le ſommet de l'axe AG de la parabole qu'il faut décrire, puiſque l'équation $ay = xx$, n'a point beſoin de réduction; il n'y a donc qu'à décrire (art. 10. n°. 11) ſur l'axe AG une parabole dont le parametre ſoit la ligne donnée $KL = a$.

Pour conſtruire preſentement l'équation au cercle $ay + bx = xx + yy$; ſoit fait pour la réduire $y - \frac{1}{2}a = u$, & $x - \frac{1}{2}b = z$; & l'on aura l'équation réduite $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - uu = zz$, qui avec les réductions donne cette conſtruction.

Le point A étant toujours l'origine des inconnues y & x; à cauſe de la premiere réduction $y - \frac{1}{2}a = u$, l'on prendra

prendra $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}KL$, & ayant mené CO parallele à AD ; à cauſe de la ſeconde réduction $x - \frac{1}{2}b = z$, on prendra ſur CO, $CE = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}MN$, & le point E ſera l'origine des inconnues z, qui va vers O, & α, parallele à AG, & le centre du cercle qu'il faut décrire : mais $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$, qui eſt la racine du terme connu de l'équation réduite, eſt le demi diametre du même cercle ; c'eſt pourquoi ſi du centre E par A, on décrit un cercle, il coupera la parabole en un point Q, par où ayant mené QP parallele AH ; PQ & PA ſeront les deux moyennes proportionnelles qu'il falloit trouver.

DÉMONSTRATION.

IL eſt clair que le cercle coupe AG & AH en I & en D, de maniere que $AI = 2AC = KL = a$, & $AD = 2CE = MN = b$. Ainſi $PI = PA - AI = y - a$, & $PF = AD - PQ = b - x$. Or par la proprieté du cercle $AP \times PI = PM \times PF$, ou en termes algebriques, $yy - ay = bx - xx$, ou $yy - bx = ay - xx$: mais (art. 10) $ay = xx$; donc $yy - bx = 0$, ou $yy = bx$. Or $ay = xx$ donne AI, ou $KL . PQ :: PQ . PA$, & $yy = bx$ donne $PQ . PA :: PA . AD$, ou MN ; donc KL, PQ, PA, & MN ſont continuellement proportionnelles. C. Q. F. D.

EXEMPLE III.

Problême Solide.

FIG. 91. 4. *UNE courbe* AM, *dont l'axe eſt* AP, *ſon ſommet* A, *& un point* D *au dedans ou au dehors de cette courbe, étant donnez de poſition ſur un Plan. Il faut mener du point* D *une ligne droite* DMC, *qui coupe la courbe* AM, *ou ſa tangente au point* M *à angles droits.*

Ayant ſuppoſé le Problême reſolu, ſoient menées les droites *DB* & *MP* perpendiculaires à *AC*; du point *M* la droite *ME* parallele à *AC*, qui rencontrera *DB* en *E*; & par le point *M* la tangente *MT*. Nommant preſentement les données *AB*, *b*; *DB*, *c*; & les indéterminées *AP*, *x*; *PM*, *y*; & *PT*, *t*; *BP* ou *ME* ſera $b + x$, ſi le point *B* eſt hors de la courbe, & *DE*, $c - y$.

Langle *CMT* étant droit par l'Hypoteſe, les triangles *MPT*, *CPM* & *MED* ſeront ſemblables; c'eſt pourquoi l'on aura $y\,(MP).t\,(PT) :: x + b\,(EM).c - y\,(ED)$; donc $cy - yy = tx + bt$, qui eſt une équation generale pour toutes les courbes *AM*, & que l'on déterminera à telle courbe que l'on voudra, en y ſubſtituant en la place de *t*, l'expreſſion de la ſoutangente *PT*.

Si l'on veut par exemple que la courbe *AM* ſoit une parabole; *PT* ſera (art. 11 n°. 6) $= 2x = t$; c'eſt pourquoi en mettant pour *t* ſa valeur $2x$, l'on aura $cy - yy = 2xx + 2bx$, qui eſt une équation à l'Ellipſe; & nommant le parametre de la parabole *a*, l'on aura (art. 10) $ax = yy$, qui eſt l'équation à la parabole *AM*.

Si l'on fait évanouir *x*, l'on aura une équation du troiſiéme degré, qui ne peut être réduite; & par conſequent le Problême propoſé eſt ſolide. Mais lorſqu'on a une équation à la Parabole, & une à l'Ellipſe, ou à l'Hyperbole par rapport à ſes diametres où les inconnues ne ſe multiplient point, on peut toujours par leur moyen trouver une équation au cercle en cette ſorte.

Aprés avoir délivré dans l'équation à l'Ellipſe, ou à l'Hyperbole, le quarré de l'inconnue qui n'eſt point quarrée dans l'équation à la parabole, de toute quantité connue, l'on fera évanouir le quarré de l'autre inconnue, & l'équation qui en reſultera ſera une équation à la parabole, qui étant combinée avec la premiere par addition, ou ſouſtraction, donnera une équation au cercle. Ainſi en diviſant par 2 l'équation précedente $cy - yy = 2xx + 2bx$, l'on a $\frac{1}{2} cy - \frac{1}{2} yy = xx + bx$, & mettant pour yy ſa valeur ax, priſe dans l'équation à la parabole $ax = yy$; l'on aura $\frac{1}{2} cy - \frac{1}{2} ax = xx + bx$, qui eſt une autre équation à la parabole; & en combinant par addition ces deux équations à la parabole, l'on aura $\frac{1}{2} cy - \frac{1}{2} ax + ax = xx + bx + yy$, ou $\frac{1}{2} cy + \frac{1}{2} ax = xx + bx + yy$, qui eſt une équation au cercle.

Quoique l'on pût conſtruire le Problême par le moyen de l'équation au cercle, & de la ſeconde équation à la parabole; il eſt neanmoins à propos de ſe ſervir de la premiere $ax = yy$, parcequ'elle appartient à la parabole donnée AM qui ſe trouve toute conſtruite; c'eſt pourquoi il ne reſte qu'à conſtruire l'équation au cercle, afin que le Problême ſoit entierement réſolu.

L'équation au cercle étant réduite, donne avec les réductions, cette conſtruction.

Ayant pris $AF = \frac{1}{2} b - \frac{1}{4} a$, on menera FG parallele BD & $= \frac{1}{4} c$, & du centre G par A, l'on décrira un cercle qui coupera la parabole au point cherché M.

DE'MONSTRATION.

AYANT joint GA, & mené GI parallele à AP, qui rencontrera PM en H, & la circonference du cercle

en I, l'on aura par la proprieté du cercle, GA^2 ou $GI^2 - GH^2 = HM^2$, ou en termes algebriques $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab + \frac{1}{16}aa + \frac{1}{16}cc - xx - bx - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}ab - \frac{1}{16}aa = yy - \frac{1}{2}cy + \frac{1}{16}cc$, qui ſe réduit à $xx + bx - \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}cy - yy$. L'on a auſſi par la proprieté de la parabole $ax = yy$, qui étant combinée par addition avec l'équation précedente donne $xx + bx + \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}cy$, ou $2xx + 2bx = cy - yy$ (en mettant pour ax ſa valeur yy, en multipliant par 2, & tranſpoſant) qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE V.

Problême Solide.

FIG. 92. 5. *IL faut décrire un triangle* CBD *rectangle en* B, *dont on connoît le plus grand* ED *des deux ſegmens de la baſe faits par la perpendiculaire* BE, *qui tombe de l'angle droit* B *ſur la baſe* CD, *& la difference* DF *des côtez.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé les données ED, a; DF, b; & les inconnues EC, x; CB, ou BF, y; CD ſera $x + a$; & BD, $y + b$; l'on aura à cauſe des triangles rectangles CEB, BED, $CB^2 - CE^2 = DB^2 - DE^2$, & en termes algebriques $yy - xx = yy + 2by + bb - aa$, ou $xx = aa - 2by - bb$, qui eſt une équation à la parabole.

A cauſe des triangles ſemblables DCB, BCE, l'on aura $a + x\ (DC) . y\ (CB) :: y . x\ (CE)$; donc $yy = ax + xx$, qui eſt une équation à l'Hyperbole équilatere.

Si l'on fait preſentement évanouir l'une des deux inconnues, on aura une équation du quatriémedegré, qui ne pouvant être réduite à une équation du ſecond, montre que le Problême eſt ſolide.

Or quoique les lignes exprimées par les deux inconnues x & y, n'ayent point les qualitez dont il eſt parlé dans la premiere Obſervation de l'article 4. Neanmoins, parceque l'on peut toujours trouver une équation au cercle quand on a deux équations indéterminées du ſecond degré où les deux inconnues ne ſont point multipliées entr'elles, quoiqu'il n'y en ait aucune des deux à la parabole, on peut par leur moyen conſtruire le Problême, comme on va voir par cet exemple.

La ſeconde équation $yy = ax + xx$ donne $xx = yy - ax$, & mettant cette valeur de xx dans la premiere équation $xx = aa - 2by - bb$, qui eſt à la parabole, l'on aura $yy - ax = aa - 2by - bb$, qui eſt une autre équation à la parabole; & en ajoutant les deux premiers & les deux ſeconds membres de ces deux équations à la parabole, l'on aura $xx + yy - ax = 2aa - 4by - 2bb$, ou $xx - ax + yy + 4by = 2aa - 2bb$, qui eſt une équation au cercle.

Pour réduire cette équation, ſoit fait $x - \frac{1}{2}a = z$ & $y + 2b = u$; l'on aura $zz = \frac{5}{4}aa + 2bb - uu$, qui avec les réductions fournit cette conſtruction.

Soit le point A l'origine des inconnues x, qui va vers G, & y qu'on ſuppoſe perpendiculaire à AG; & qui va en haut. A cauſe de la premiere réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, on prendra $AR = \frac{1}{2}a$, & ayant mené par R la perpendiculaire RO; à cauſe de la ſeconde réduction $y + 2b = u$, l'on prendra $RO = 2b$; & le point O ſera le centre du cercle qu'il faut décrire; à cauſe de $2bb$, on prendra RI moyenne proportionnelle entre $2b$, & b; & du centre O, & du rayon IA, l'on décrira un cercle. Fig. 93.

Pour conſtruire preſentement l'une des deux équations à la parabole, par exemple la ſeconde $yy - ax = aa - 2by - bb$ ou $yy + 2by = ax + aa - bb$; ſoit fait

pour la réduire $y+b=f$, & $x+a=t$, & l'on aura $ff=at$, qui donne avec ſes réductions cette conſtruction. A cauſe de la ſeconde réduction $x+a=t$, l'on prolongera AG du côté de A en H, en ſorte que $AH=a$, & ayant mené HK perpendiculaire à AH; à cauſe de la premiere réduction $y+b=f$; on prendra $HK=b$, l'on menera KS parallele à AG, & l'on décrira (art. 10 n°. 11) ſur l'axe KS, dont le ſommet eſt K, une parabole par le moyen de l'équation réduite $ff=at$. Cette parabole coupera le cercle en deux points M & N, de ma-
FIG. 92, niere qu'ayant abaiſſé des points M & N les perpendicu-
93. laires MP, NQ; PM ſera la valeur poſitive de $y=CB$; NQ, ſa valeur négative; & AP, la valeur de $x=EC$. De ſorte que ſi l'on fait $EC=AP$, & qu'on décrive ſur le diametre DC un demi cercle dans lequel ayant ajuſté $CB=PM$, & mené BD, le triangle CBD ſera celui qu'il falloit décrire.

DE'MONSTRATION.

AYANT joint IH & mené par le centre O le diametre VOT parallele à AG qui rencontrera MP prolongée en X de part ou d'autre du point O. Par la conſtruction, & par la proprieté du cercle, l'on aura IH^2, ou OV^2, ou $OT^2-OX^2=XM^2$, ou en termes algebriques $\frac{9}{4}aa+2bb-xx+ax-\frac{1}{4}aa=yy+4by+4bb$, ou $2aa-xx+ax=yy+4by+2bb$.

Par la proprieté de la parabole KM dont le parametre eſt a, l'on aura $a\times KL=LM^2$, ou $ax+aa=yy+2by+bb$, ou en ſouſtrayant la ſeconde équation de la premiere, le premier membre du premier; & le ſecond du ſecond, l'on aura $aa-xx=2by+bb$, qui eſt la premiere équation du Problême, & en ſouſtrayant cette équation de la précedente, chaque membre de chaque membre, l'on aura $ax+xx=yy$, qui eſt la ſeconde équation du Problême. C. Q. F. D.

SECTION X.

Où l'on donne la Méthode de conſtruire les Problêmes Solides par le moyen de leurs équations déterminées ; ou ce qui eſt la même choſe, de conſtruire les équations déterminées du troiſiéme, & du quatriéme degré.

METHODE.

XXIV. SOIT qu'on ait employé deux ou pluſieurs lettres inconnues, ou qu'on n'en ait employé qu'une pour réſoudre un Problême, quand on eſt venu à une équation déterminée du troiſiéme ou du quatriéme degré, qui ne peut être réduite à une équation du ſecond, le Problême eſt neceſſairement Solide, comme on a déja dit ailleurs, & on le pourra toujours conſtruire par le moyen de cette équation, en obſervant les régles qui ſuivent.

1. Si l'équation a un ſecond terme, on le fera premierement évanouir. Cela fait.

2. Si l'équation eſt du troiſiéme degré, on la multipliera par l'inconnue qu'elle renferme pour la rendre du quatriéme.

3. On trouvera une équation à la parabole dont un des membres ſera le quarré de la lettre inconnue de l'équation que l'on veut conſtruire, & l'autre membre ſera le produit d'une autre lettre inconnue par une lettre connue quelconque, ou plûtôt par une des lettres connues qui ſe trouve le plus frequemment dans l'équation à conſtruire : car par ce moyen on rend la conſtruction un peu plus ſimple.

4. On fera évanouir l'inconnue de l'équation à conſtruire dans le premier & dans le troiſiéme terme: (car on ſuppoſe qu'elle n'en a point de ſecond) en ſubſtituant en ſa place, ſa valeur priſe dans l'équation à la parabole que l'on a formée, & l'équation qui en réſultera ſera une autre équation à la parabole.

5. On combinera par addition ou ſouſtraction ces deux équations à la parabole, de maniere que l'équation qui en réſulte ſoit une équation au cercle.

6. On conſtruira l'équation au cercle, & la plus ſimple des deux équations à la parabole, comme dans la Section précedente, en ſuppoſant que les lignes exprimées par les deux inconnues font un angle droit, & les Interſections de ces deux courbes donneront les racines, ou valeurs tant poſitives que négatives de l'inconnue de l'équation à conſtruire. Tout ceci ſera éclairci par les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

Problême Solide.

7. *TROUVER une ligne dont le cube ſoit au cube d'une ligne donnée* CD, *dans la raiſon donnée de* m *à* n.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée AB, a; & l'inconnue x, l'on aura par la condition du Problême $x^3 . a^3 :: m . n$, d'où l'on tire $x^3 = \frac{ma^3}{n}$, qui eſt une équation du troiſiéme degré, qui ne pouvant être réduite à une équation du ſecond; il ſuit que le Problême eſt Solide.

En multipliant cette équation par x, l'on aura $x^4 = \frac{ma^3x}{n}$, & faiſant (n° 3) $ay = xx$, qui eſt une équation à la parabole, l'on a $aayy = x^4$; & mettant dans l'équation à conſtruire pour x^4 ſa valeur $aayy$, l'on aura $aayy = \frac{ma^3x}{n}$, ou $yy = \frac{max}{n}$, qui eſt une autre équation

tion à la parabole. Et combinant ces deux équations à la parabole par addition ou ſouſtraction, l'on aura $yy - ay = \frac{max}{n} - xx$, qui eſt une équation au cercle dont la conſtruction jointe avec celle de l'équation à la parabole $ay = xx$, réſoudra le Problême.

Soit le point A l'origine des inconnues y qui va vers G, & x qui lui eſt perpendiculaire. Et ſoit décrite (art. 10 n°. 11) ſur l'axe AG dont le ſommet eſt A la parabole AH, dont le parametre ſoit $a = AB$. Cette parabole ſera celle dont l'équation eſt $ay = xx$. FIG. 94.

L'équation au cercle étant réduite donnera avec les réductions cette conſtruction.

Ayant pris ſur AG, $AI = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}CD$, on élevera au point I la ligne IK perpendiculaire à AG & égale $\frac{ma}{2n}$, & du centre K par A, l'on décrira un cercle qui coupera la parabole AH au point M, par où l'on menera la droite MP parallele à IK; je dis que MP exprimée par x qui eſt l'inconnue de l'équation $x^3 = \frac{ma^2}{n}$ que l'on vient de conſtruire, eſt le côté du cube qu'il falloit trouver.

DE'MONSTRATION.

Ayant joint AK, & mené KOR parallele à AP qui rencontrera le cercle en R, & PM en O. L'on a par la proprieté du cercle, KA^2, ou $KR^2 - KO^2 = OM^2$, ce qui eſt en termes algebriques $\frac{1}{4}aa + \frac{mmaa}{4nn} - yy + ay - \frac{1}{4}aa = xx - \frac{max}{n} + \frac{mmaa}{4nn}$, qui devient $ay - yy = xx - \frac{max}{n}$. Mais à cauſe de la parabole l'on a (art. 10) $ay = xx$; donc $yy = \frac{n^2}{aa}$; mettant donc dans l'équa-

tion précedente pour ay, ſa valeur xx, & pour yy, ſa valeur $\frac{x^4}{aa}$, l'on aura aprés les réductions ordinaires $x^3 = \frac{ma^3}{n}$. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE II.

Problême Solide.

FIG. 95. 8. *DIVISER un arc de cercle* BDEC *en trois parties égales* BD, DF, FC.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu; puiſque par l'Hypotheſe les arcs BD, DF, FC ſont égaux, les cordes BD, FD, FC ſeront auſſi égales, & DF ſera parallele à BC. Ayant mené les rayons AB, AD, AF, AC, & outre cela la ligne FI parallele à AD; les triangles ADB, ADF, AFC ſeront égaux, ſemblables & iſoſceles, comme auſſi les triangles BHD, CKF: car l'angle CFK ($= KFD = AKH$) $= CKF$. Par la même raiſon l'angle $BDH =$ l'angle BHD; c'eſt pourquoi, puiſque (Hyp.) $CF = DB$; CK ſera $= BH$. Mais les triangles ACF, CFK, FKI, ſont auſſi ſemblables & iſoſceles: car à cauſe des paralleles AD, IF, l'angle KIF ($= BHD$) $= IKF = KFC = FCA$.

En nommant preſentement le rayon AC, a; la donnée BC, b; & l'inconnue CF, ou CK, ou IH, ou HB, x; l'on aura $AC(a).CF(x) :: CF(x).FK = \frac{xx}{a}$, & $CF(x).FK\left(\frac{xx}{a}\right) :: FK\left(\frac{xx}{a}\right).KI = \frac{x^3}{aa}$, donc $CI = x - \frac{x^3}{aa}$; & partant $CB = IB + CI = 2x + x - \frac{x^3}{aa} = b$; d'où l'on tire $x^3 = 3aax - aab$, qui eſt une équation du troiſiéme degré, & qui ne pouvant être réduite à une équation du ſecond, fait connoître que le Problême eſt ſolide.

Pour le conſtruire, ſoit premierement l'équation précedente multipliée par ſon inconnue x, & l'on aura $x^4 = 3aaxx - aabx$; & ayant fait $ay = xx$, l'on aura $aayy$

$= x^4$. Mettant donc dans l'équation du Problême, pour x^4, & pour xx, leurs valeurs $aayy$, & ay ; l'on aura aprés avoir diviſé par aa, $yy = 3ay - bx$, qui eſt une autre équation à la parabole. Et en combinant par addition ou ſouſtraction, ces deux équations à la parabole, l'on aura aprés la réduction $yy - 4ay = -xx - bx$, qui eſt une équation au cercle, dont la conſtruction jointe avec celle de l'équation à la parabole $ay = xx$, réſoudra le Problême.

Soit donc le point A l'origine des inconnues y qui va vers G, & x perpendiculaire à AG qui va vers B, & ſoit décrite (art. 10 n° 11) ſur l'axe AG, dont le ſommet ſoit A, la parabole AH dont le parametre ſoit $a =$ (Fig. 95) AC. Cette parabole ſera celle dont l'équation eſt $ay = xx$. FIG. 95. 96.

L'équation au cercle étant réduite, donnera, avec les réductions, cette conſtruction.

Soit priſe $AI = 2a =$ (Fig. 95) $2AC$, & ayant élevé IK perpendiculaire à AG & $= \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} BC$, l'on décrira du centre K par A, un cercle $AMNF$ qui coupera la parabole aux points A, M, N, F, parmi leſquels il y en a trois M, N, & F dont on peut tirer des perpendiculaires MP, NQ, FE ſur l'axe AG de la parabole, qui ſont les trois racines de l'inconnue x de l'équation du Problême, deux deſquelles PM, & QN ſont poſitives, & la troiſiéme EF, negative, de ſorte que PM ſera la corde du tiers de l'arc $BDFC$ qu'il falloit diviſer ; & QN, la corde du tiers du reſte du cercle BVC.

DE'MONSTRATION.

PAR la proprieté de la parabole l'on a (art. 10) $ay = xx$. Ayant joint KA, & mené le diametre ZKR parallele à AG ; l'on aura par la proprieté du cercle KA^2, ou $KR^2 - KT^2 = TN^2$, ou $KZ^2 - KX^2 = XM^2$, ou en termes algebriques, $4aa + \frac{1}{4} bb - yy + 4ay - 4aa =$

$xx + bx + \frac{1}{4}bb$, ou $4ay - yy = xx + bx$; & en remettant pour ay, & pour yy leurs valeurs xx, & $\frac{x^4}{aa}$ prises dans l'équation à la parabole $ay = xx$, l'on aura, aprés les réductions, $x^3 = 3aax - aab$. C. Q. F. D.

REMARQUE I.

9. S'IL y avoit un second terme dans l'équation que l'on vient de construire, il auroit fallu avant toutes choses le faire évanouir; & alors l'inconnue x, qui exprime la corde CF (Fig. 95), ne se seroit plus trouvée dans l'équation à construire; c'est pourquoi les perpendiculaires PM, QN, ne seroient égales aux cordes du tiers des arcs BFC, BVC, qu'aprés les avoir augmentées ou diminuées de la quantité connue de l'équation qui auroit servi à faire évanouir le second terme; ce qui n'auroit apporté aucune difficulté.

REMARQUE II.

FIG. 96. 10. LES valeurs positives de x, PM & QN sont ensemble égales à la négative EF. Ce que je démontre en cette sorte. On les prolongera en sorte qu'elles rencontrent le cercle en L, S & H, & le diametre ZR en X, T & O. Ayant nommé le parametre AB de la parabole AM, a; la corde AG, qui est l'axe de la même parabole, b; IK, ou PX, ou EO, c; PM, x; QN, y; & FE, z; PL sera, $2c + z$; QS, $2c + y$; & EH, $z - 2c$. AP sera (art. 10) $\frac{xx}{a}$; AQ, $\frac{yy}{a}$; AE, $\frac{zz}{a}$; & partant PG, $b - \frac{xx}{a}$; QG, $b - \frac{yy}{a}$; EG, $b - \frac{zz}{a}$.

DEMONSTRATION.

L'ON a par la proprieté du cercle.

1. $AP \times PG = \frac{abxx - x^4}{aa} = 2cx + xx = MP \times PL$.

2. $AQ \times QG = \frac{abyy - y^4}{aa} = 2cy + yy = NQ \times QS$.

3. $AE \times EG = \frac{abzz - z^4}{aa} = zz - 2cz = HE \times EF$.

On tire de la premiere équation,

$ab = \frac{x^3 + 2aac + aax}{x}$, & ſubſtituant cette valeur de ab dans la ſeconde & troiſiéme, l'on aura aprés les réductions $x^3y + 2aacy = y^3x + 2aacx$, & $x^3z + 2aacz = z^3x - 2aacx$, d'où l'on tire $2aac = xyy + xxy$, & $2aac = xzz - xxz$; donc $yy + xy = zz - xz$, d'où l'on tire $x = z - y$, donc $x + y = z$. *C. Q. F. D.*

On démontreroit de même que, ſi le cercle coupoit la parabole en quatre points, les ordonnées qui partiroient des points d'Interſection d'un côté de l'axe ſeroient enſemble égales aux ordonnées qui partiroient des points d'Interſection de l'autre côté de l'axe. Soit qu'il en eût deux d'un coté, & deux de l'autre, ou trois d'un côté, & une de l'autre.

Ce ſeroit encore la même choſe, ſi le cercle touchoit la parabole d'un côté de l'axe, & la coupoit en deux points de l'autre côté: car le point touchant doit être regardé comme deux points d'Interſection infiniment proches. Ainſi, le double de l'ordonnée qui partiroit du point touchant, ſeroit égal à la ſomme des deux ordonnées qui partiroient des deux points d'Interſection qui ſeroient de l'autre côté de l'axe.

EXEMPLE III.

Problême Solide.

11. SOIT encore le Problême propoſé dans la Section précedente, Exemple 5, où l'on a trouvé ces deux équations $xx = aa - 2by - bb$, & $yy = ax + xx$.

Si l'on fait évanouir y, l'on aura

$$A.\ x^4 - 2aaxx + 4abbx + a^4 - 2bbxx - 2aabb + b^4 = 0,$$

qui n'a point de ſecond terme.

Si au lieu de faire évanouir y, l'on fait évanouir x, l'on aura.

$B.\ y^4 + 4by^3 + 6bbyy + 4b^3y + b^4 = 0.$
$\quad - 2aayy - 2aaby - aabb$

d'où faiſant évanouir le ſecond terme, en faiſant $y + b = z$, l'on aura

$C.\ z^4 - 2aazz + 2aabz - aabb = 0.$

Et comme cette équation eſt plus ſimple que l'équation A, il vaut mieux s'en ſervir pour conſtruire le Problême, que de l'équation A. Faiſant donc

$D.\ au = zz$, l'on aura $aauu = z^4$, & mettant les valeurs de zz & de z^4 dans l'équation C, l'on aura aprés avoir diviſé par aa,

$E.\ uu - 2au + 2bz - bb = 0$, qui eſt une équation à la Parabole.

Si l'on ajoute le ſecond membre de l'équation D au premier de l'équation E; & le premier au ſecond, l'on aura $uu - 2au + zz + 2bz - bb = au$, ou

$F.\ uu - 3au + zz + 2bz - bb = 0$, qui eſt une équation au cercle.

Si l'on réduit l'équation F, & qu'on la conſtruiſe avec
FIG. 93. l'équation D. En prenant le point K pour l'origine des inconnues u qui va vers S, & z qui lui eſt perpendiculaire, & va en haut, on retombera dans la conſtruction de la Section précedente n°. 5.

DE'MONSTRATION.

PAR la conſtruction du Problême 5 (Sect. prec.) KL, ou $HP = x + a$; & $LM = y + b$; & par cette conſtruction $KL = u$, & $LM = z = y + b$; mettant donc dans ces deux équations D & F pour u, ſa valeur $x + a$, & pour z ſa valeur $y + b$, l'on aura ces deux équations.

$G.\ aa + ax = yy + 2by - bb$, &

$H.\ xx = aa - 2by - bb$, qui eſt la premiere équation de l'exemple 5, Sect. prec. & en ajoutant les deux équations G & H, le premier membre au premier, & le ſecond au ſecond, l'on aura, aprés les réductions,

$K. xx + ax = yy$, qui eſt la ſeconde équation du même Exemple. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

12. PAR le moyen de cette conſtruction, l'on ne détermine que la grandeur du côté $CB = PM$, au lieu que par la conſtruction de la Section précedente, l'on a auſſi déterminé la grandeur de $CE = AP$, d'où l'on voit que lorſqu'on conſtruit un Problême ſolide par le moyen de ſon équation déterminée, il n'eſt pas entierement réſolu. Il faut encore pour cela réſoudre & conſtruire un autre Problême ſimple ou Plan; aulieu que lorſqu'on le conſtruit par le moyen de ſes deux équations indéterminées, il eſt entierement réſolu: car les valeurs des deux inconnues ſe trouvent toujours déterminées. FIG. 92. 93.

Ainſi pour achever de réſoudre le Problême, en ſuppoſant qu'on n'a déterminé que le côté CB par la conſtruction précedente. Soit encore CE nommé x; & BD, c; l'on aura par la proprieté du triangle rectangle $x + a$ $(CD) . c (BD) :: c . a (DE)$, d'où l'on tire $x = \frac{bb}{a} - a$, qui ſervira à déterminer la grandeur CE, & le Problême ſera entierement réſolu.

REMARQUES GENERALES

Sur la conſtruction des Problêmes Solides.

13. LES conſtructions du deuxiéme & cinquiéme exemples de la Section précedente, comparées avec les conſtructions du ſecond & du troiſiéme de cette Section; font voir qu'il eſt plus à propos de conſtruire les Problêmes ſolides avec deux équations indéterminées, qu'avec une équation déterminée, lorſqu'on le peut. Or on le peut toujours lorſque l'une des équations indéterminées ſe rapporte au cercle, ou bien lorſque les deux lettres inconnues ne ſe multiplient point dans les deux mêmes équations indéterminées: car en ce cas on trouvera toujours une équation au cercle, comme on a fait dans cet exemple.

On voit auſſi qu'il n'eſt pas abſolument neceſſaire que les deux lettres inconnues ayent les qualitez marquées dans la premiere Obſervation de l'article 4. On peut même le placer de differentes manieres, & chercher à chaque fois deux équations : car on trouve ſouvent des équations plus ſimples en les plaçant d'une maniere, qu'en les plaçant d'une autre.

14. Quoiqu'on n'ait employé dans cette Section que le cercle & la parabole pour la conſtruction des Problêmes ſolides, cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe les conſtruire avec celle qu'on voudra des Sections coniques : car on peut tirer d'une équation déterminée du troiſiéme & du quatriéme degré des équations à l'Ellipſe, & à l'Hyperbole comme on en a tiré une équation au cercle, avec cette difference ſeule qu'on ne peut tirer d'une équation du quatriéme degré, une équation à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, & qu'on la peut tirer d'une équation du troiſiéme.

Soit par exemple *A*. $x^3 = 3aax - aab$, qui eſt l'équation de l'exemple 2.

En ſuppoſant *B*. $ay = xx$, & mettant en la place de xx ſa valeur ay, l'on aura *C*. $xy = 3ax - b$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes. Et multipliant l'équation *C* par x, & mettant enſuite pour xx, ſa valeur ay dans le premier terme, l'on aura *D*. $yy = 3xx - bx$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par rapport à ſes diametres, comme celle de l'art. 14 n° 13; & mettant encore pour xx ſa valeur ay dans l'équation *D*; il viendra *E*. $yy = 3ay - bx$, qui eſt une équation à la parabole. En ajoutant les deux membres des deux équations *B* & *E*, le premier au premier, & le ſecond au ſecond, l'on aura $yy = xx + 2ay - bx$, qui eſt une équation à l'Hyperbole équilatere. Si l'on ajoute le ſecond membre de l'équation *B* au premier de l'équation *E*, & le premier au ſecond, l'on aura $yy + xx = 4ay - bx$, qui eſt une équation au cercle. Si on multiplie l'équation *B* par un nombre quelconque entier ou rompu, ou

par

par une fraction litterale, comme $\frac{a}{b}$, avant que de la combiner avec l'équation F, comme on vient de faire; l'on aura une équation à l'Hyperbole, & une à l'Ellipſe.

On peut de même combiner deux des équations précedentes priſes à volonté, & enſuite celles qui réſultent de ces combinaiſons, ce qui donnera une infinité d'équations aux Sections coniques, de l'une deſquelles on pourra ſe ſervir avec l'équation au cercle.

15. On tirera de la même maniere d'une équation du quatriéme degré qui n'a point de ſecond terme, des équations aux Sections coniques, & une au cercle : mais on n'en trouvera point à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes: où l'on remarquera que ſi l'on tiroit deux équations au cercle d'une équation du troiſiéme ou du quatriéme degré, le Problême ſeroit plan, & l'équation ſe pourroit réduire à une équation du ſecond degré.

16. On peut encore conſtruire les Problêmes ſolides avec l'équation au cercle, & telle Section conique qu'on voudra, comme on peut voir dans le Traité de la Conſtruction des Equations de Mr de la Hire, dont on a ſuivi ici la Méthode.

17. On multiplie les équations du troiſiéme degré par leur inconnue, pour en tirer une équation à la parabole, differente de celle que l'on forme arbitrairement pour introduire dans l'équation déterminée afin d'en tirer des équations indéterminées : mais cela n'y apporte aucun changement : car les Problêmes du troiſiéme & du quatriéme degré ſont de même nature ; & même leurs conſtructions ne different qu'en ce que les deux Courbes qu'on y employe paſſent par l'origine de l'inconnue de l'équation, quand elle eſt du troiſiéme degré, & qu'elles n'y paſſent pas quand elle eſt du quatriéme.

SECTION XI.

Où l'on donne la Méthode de réſoudre & de conſtruire les Problêmes indéterminez, dont les Equations excedent le ſecond degré : ou ce qui eſt la même choſe, de décrire les courbes dont ces Equations expriment la nature ; & de réſoudre & de conſtruire les Problêmes déterminez, dont les Equations excedent le quatriéme degré.

METHODE.

XXV. ON a donné des régles dans la cinquiéme, ſixiéme & ſeptiéme Section pour décrire les courbes du premier genre d'une maniere plus ſimple que celles qu'on tireroit naturellement de leurs équations : mais on n'en peut pas donner pour décrire celles des genres plus compoſez. Il faudroit pour cela les avoir examinées les unes aprés les autres ; ce qui iroit à l'infini : car chaque genre en contient un nombre d'autant plus grand qu'il eſt plus compoſé, & il y a une infinité de genres.

1. On dira ſeulement en general qu'aprés avoir trouvé une équation pour chaque Problême (en obſervant pour nommer les lignes inconnues, ce qui eſt preſcrit dans la premiere ou ſeptiéme Obſervation de l'art. 4), qui exprime la nature de la Courbe qui doit ſervir à le réſoudre, qui en détermine le genre, & qui ſoit réduite à ſon expreſſion la plus ſimple ; il faut examiner par l'inſpection des termes de l'équation, celle des deux inconnues dont on peut plus facilement trouver les valeurs en ſuivant les regles de la conſtruction des équations déterminées, trouver par les mêmes regles les valeurs de cette inconnue, en aſſignant à l'autre inconnue une va-

leur déterminée, & arbitraire ; & l'on aura à chaque fois qu'on aſſignera à cette inconnue des valeurs arbitraires, autant de points de la courbe qu'on veut décrire, que l'autre inconnue aura de valeurs réelles, poſitives, & négatives. De ſorte que ſi l'inconnue la moins élevée de l'equation, ſi elles ne le ſont pas toutes deux également, à une ou deux dimenſions, on en trouvera les valeurs par les regles de la Section II, en aſſignant à l'autre inconnue des valeurs arbitraires, & la regardant enſuite comme déterminée. Si elle a trois ou quatre dimenſions, on en trouvera les valeurs par les regles de la Section précedente ; & ſi elle a un plus grand nombre de dimenſions, on en trouvera les valeurs comme on expliquera dans la ſuite : mais comme l'on en pourra plus tirer l'équation au cercle, il ne ſera point neceſſaire d'en faire évanouir le ſecond terme, s'il s'y rencontre: où l'on remarquera qu'il faut réiterer la conſtruction autant de fois qu'on aſſignera des valeurs differentes à l'inconnue que l'on prend pour conſtante.

2. On peut auſſi, aprés avoir trouvé une équation comme on vient de dire, abandonner la premiere & ſeptiéme Obſervation de l'art. 4, & nommer d'autres lignes par des lettres inconnues, & chercher par ce moyen d'autres équations, qui n'exprimeront pas effectivement la nature de la courbe qui doit réſoudre le Problême, & qui n'en détermineront pas le genre : mais qui pourront ſervir à décrire plus ſimplement la même courbe, ſoit par elles-mêmes, ou en faiſant évanouir par leur moyen les inconnues de la premiere équation, afin de la rendre plus ſimple, & d'en tirer plus facilement la maniere de décrire la même courbe.

3. On peut encore tirer de l'équation qui exprime la nature de la courbe qui doit réſoudre un Problême, des équations à quelqu'une des quatre courbes du premier genre, lorſqu'on y trouve l'expreſſion de l'appliquée de quelqu'une des quatre mêmes courbes, en égalant cette expreſſion à une troiſiéme lettre inconnue, ou à ſon quarré, & la conſtruction de ces équations facilitera

la deſcription de la courbe qu'on veut décrire. Tout ce-ci ſe trouvera pratiqué dans les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

Problême indéterminé.

FIG 97. 4. *UN demi cercle* AFB, *dont le diametre eſt* AB, *& le centre* C, *étant donné, ayant mené par un point quelconque* P *du diametre* AB, *la droite* PK *perpendiculaire à* AB, *qui rencontre la circonference* AFB *en* K. *Il faut trouver ſur* PK *le point* M, *qui la diviſe en ſorte que* AP . PM :: PB . PK. *Et comme il y a une infinité de points comme* M, *il faut trouver la courbe ſur laquelle ils ſe trouvent tous.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu ; & nommé le diametre AB, a ; & les indéterminées AP, x ; PM, y ; PB ſera, $a - x$; & par la proprieté du cercle PK ſera $\sqrt{ax - xx}$, & l'on aura par les qualitez du Problême, $AP(x) . PM(y) :: PB(a - x) . PK = \frac{ay - xy}{x} = \sqrt{ax - xx}$, & en quarrant chaque membre, multipliant enſuite par xx, & diviſant par $a - x$; l'on aura $x^3 = ayy - xyy$, qui eſt une équation du troiſiéme degré, qui montre que la courbe cherchée dont elle exprime la nature eſt du ſecond genre. On tire de l'équation que l'on vient de trouver, $y = \pm \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a - x}}$, ou $y = \pm \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$, en multipliant les deux termes de la fraction par $\sqrt{x}$, ce qui ne change ni le degré de l'équation, ni le genre de la courbe, d'où l'on voit que la courbe paſſe des deux côtez de l'axe AB par les points M, & m, & que la partie Am eſt égale & ſemblable à la partie AM, puiſque $Pm = PM$.

Si l'on fait $x = 0$, le point P tombera en A, les termes où x ſe rencontrent ſeront nuls, & l'on aura par conſequent $y = 0$, d'où l'on connoît que la courbe ren-

contre ſon axe au point A, puiſque AP & PM s'y anéantiſſent, & qu'elle ne rencontre qu'en A la parallele à PK menée par A: car ſi elle la rencontroit encore en quelqu'autre point, l'on trouveroit une valeur de y qui le détermineroit.

Si l'on fait $y = o$, l'on aura auſſi $x = o$, qui montre que la courbe ne rencontre ſon axe AB qu'au ſeul point A; & comme elle ne rencontre auſſi la parallele à PK, menée par A qu'au ſeul point A; il ſuit qu'elle eſt toute du côté de B par rapport à cette parallele.

Puiſque par l'Hypotheſe $PB . PK :: AP . PM$, il eſt clair que la courbe AM touche ſon axe au point A: car le point P étant infiniment proche de A, les points K & M en ſeront auſſi infiniment proches; & parcequ'alors PB ſurpaſſera pour ainſi dire infiniment PK; AP ſurpaſſera auſſi pour ainſi dire infiniment PM; d'où il ſuit que la petite partie AM de la courbe ſera pour ainſi dire dans la direction de ſon axe AB, qu'elle touche & coupe par conſequent au point A.

L'on voit encore par la même équation que x croiſſant, y croît auſſi, même en deux manieres: car le numerateur xx du membre fractionnaire croiſſant, le dénominateur $\sqrt{ax - xx}$ diminue.

Si l'on augmente x juſqu'à ce qu'elle devienne $= a$, le point P tombera en B, & l'équation deviendra $y = \frac{aa}{o}$, & comme ce rapport $\frac{aa}{o}$, eſt plus grand que tout rapport donné, c'eſt à dire, infiniment grand; il ſuit que ſi l'on mene par B une ligne BH parallele à PM, cette parallele ne rencontrera la courbe qu'à une diſtance infinie, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'elle lui ſera aſymptote. L'on voit auſſi qu'on ne peut pas augmenter x en ſorte qu'elle ſurpaſſe AB: car le dénominateur de la fraction deviendroit une quantité imaginaire; & par conſequent auſſi les valeurs de y: ce qui fait voir que la courbe ne paſſe point au-delà BH menée par B parallele à PK. Il ſuit de tout ce qu'on vient de dire que

la courbe eſt toute renfermée entre les deux paralleles à PM, menées par A & par B.

Puiſque BH eſt aſymptote à la courbe AM, il ſuit qu'elle coupe la circonference du cercle en quelque point F, qu'il eſt aiſé de déterminer: car faiſant $PM = PK$, ou $y = \sqrt{ax - xx}$, & mettant cette valeur de y dans l'équation précedente, elle deviendra $ax - xx = xx$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}a$, qui fait voir que le point F diviſera par le milieu le demi cercle AFB: ce que l'on peut auſſi remarquer par l'Hypotheſe: car le point P tombant en C, l'on aura $AC . CM :: CB . CK$; & partant $CM = CK = AC$.

La qualité du Problême fournit une maniere aſſez ſimple pour décrire la courbe: mais il faut examiner ſi l'on n'en peut pas tirer une plus ſimple de ſon équation $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$, en cherchant les valeurs de y dans toutes les poſitions du point P. On trouve que cette équation donne cette conſtruction qui eſt preſque la même que celle que fournit le Problême. Soit priſe PM troiſiéme proportionnelle à PK & à AP, & le point M ſera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

PAR la conſtruction, & par la proprieté du cercle $\sqrt{ax - xx} . (PK) . x (AP) :: x . y (PM)$, d'où l'on tire $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$. *C. Q. F. D.*

Quoique ces conſtructions ſoient aſſez ſimples, il eſt neanmoins à propos de voir ſi l'on n'en peut pas trouver une encore plus ſimple. Soit pour ce ſujet menée par les points A & M la droite AMG qui rencontre la circonference AKB en E, & l'aſymptote AH en G, & ayant mené ED parallele à PK, & nommé DB, z; AD ſera $a - z$, & les triangles ſemblables APM, ADE,

donneront $AP(x).PM(y) :: AD(a-z).DE = \frac{ay-xy}{x}$. Mais par la proprieté du cercle $DE = \sqrt{az-zz}$ donc $az-zz = \frac{aayy-2axyy+xxyy}{xx}$, ou $z = \frac{ayy-xyy}{xx}$, en diviſant chaque membre par $a-z$. L'on a auſſi l'équation du Problême $yy = \frac{x^3}{a-x}$; donc en mettant cette valeur de yy dans l'équation précedente, l'on aura $z = \frac{ax-xx}{a-x}$; d'où l'on tire $z = x$, ou $AP = DB$; donc $AM = EG$, qui donne cette conſtruction qui eſt la plus ſimple que l'on puiſſe trouver.

Soit menée du point A une ligne droite quelconque AG qui rencontrera la circonference du demi cercle en E; & ayant pris ſur AG, $AM = EG$; le point M ſera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

PUISQUE (Conſt.) $AP = DB$, AP étant x; DB ſera auſſi, x; AD, $a-x$; & l'on aura, à cauſe des triangles ſemblables APM, ADE, $AP.(x).PM(y) :: AD(a-x.DE = \frac{ay-xy}{x} =$ (par la Prop. du cercle) $\sqrt{ax-xx}$, d'où l'on tire l'équation du Problême. *C. Q. F. D.*

Dioclès Inventeur de cette courbe, l'a nommée *Cyſſoïde.*

EXEMPLE II.

Problême indéterminé.

FIG. 98. 5. *UN angle droit* ABH, *& un point fixe A ſur un de ſes côtez, étant donnez de poſition ſur un Plan. Si l'on mene du point fixe* A *une ligne quelconque* AG, *qui rencontre le côté* BH *en* G, *& qu'on prenne* GM = GB. *Il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe ſur laquelle ſe trouve le point* M, *& tous ceux que l'on trouvera de la même maniere.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, on abaiſſera du point M ſur AB la perpendiculaire MP ; & ayant nommé la donnée AB, a, & les indéterminées AP, x; PM, y; PB ſera, $a-x$; & $AM, \sqrt{xx+yy}$, & les triangles ſemblables APM, ABG donneront $AP\ (x) . PM\ (y) :: AB\ (a) . BG = \frac{ay}{x} =$ (Hyp.) GM, & à cauſe des paralleles PM, BG, l'on aura $x\ (AP) . a-x\ (PB) :: \sqrt{xx+yy}\ (AM) . \frac{ay}{x}$ (GM, ou GB). d'où l'on tire $y = \pm \frac{ax-xx}{\sqrt{2ax-xx}}$, qui eſt une équation du troiſiéme degré : car on avroit pû la diviſer par x avant que d'extraire la racine, & la courbe par conſequent eſt du ſecond genre.

Il ſeroit inutile de chercher une conſtruction plus ſimple que celle qui eſt renfermée dans l'énoncé du Problême : car il eſt impoſſible d'en trouver de plus ſimples. Voici celle que l'équation donne.

Soit prolongée AB en D, en ſorte que $BD = AB$, & décrit un demi cercle AKD ſur le diametre AD. Ayant mené par un point quelconque P la droite PK parallele BH, qui rencontrera le demi cercle en K, on prendra ſur PK, PM quatriéme proportionnelle à PK, AP, & PB, & le point M ſera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

DE'MONSTRATION.

PAR la conſtruction, & à cauſe du demi cercle, $\sqrt{2ax-xx}$ (PK) . x (AP) :: $a-x$ (PB) . y (PM), d'où l'on tire $y = \pm \frac{ax-xx}{\sqrt{2ax-xx}}$. *C. Q. F. D.*

On voit par cette équation que la courbe paſſe des deux côtez de ſon axe AB, & que les parties qui ſont de part & d'autre ſont égales & ſemblables.

Si l'on fait $x = 0$, l'on aura auſſi $y = 0$, ce qui montre que la courbe paſſe au point A, qui eſt par conſequent le ſommet de ſon axe ; & la conſtruction précedente auſſi bien que l'énoncé du Problême, font connoître qu'elle coupe au point A ſon axe AB à angles droits: car ſi l'on ſuppoſe le point P infiniment proche de A, les points K & M en ſeront auſſi infiniment proches. Or puiſque (conſt.) PK . AP :: PB . PM, & que PM eſt pour ainſi dire nulle rapport PB ; AP ſera par conſequent nulle par rapport à PK ; & partant le point M eſt pour ainſi dire dans la perpendiculaire à AB menée par A.

Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = a$; d'où il ſuit que la courbe rencontre encore ſon axe au point B, puiſque y y eſt nulle. Mais outre cela, je dis qu'elle le coupe en faiſant avec lui un angle de 45 degrez : car ſi l'on ſuppoſe que le point P ſoit infiniment proche de B, le point K ſera infiniment proche du point H miileu de la circonference du cercle AKD ; c'eſt pourquoi PK ſera égale à PA, & par conſequent $PB = PM$ à cauſe de l'Analogie précedente PK . AP :: PB . PM ; ainſi le petit triangle KPB ſera rectangle & iſoſcele, & partant l'angle PBM ſera demi droit.

La même équaion $y = \pm \frac{ax-xx}{\sqrt{2ax-xx}}$, fait voir que $AP = x$ peut devenir plus grande que $AB = a$, ſans que les valeurs de y deviennent imaginaires, ce qui fait voir que la courbe paſſe au-delà de BH par rapport à A, de ſorte que la partie MB ſe continue vers I, & l'autre vers E.

Mais parcequ'alors y devient negative de poſitive qu'elle étoit, l'équation deviendra $-y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, ou $y = \pm \frac{xx - ax}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ainſi pour décrire les parties de la courbe qui ſont au-delà de BH par rapport à A, ayant mené par un point quelconque p, la droite pk parallele à BH, l'on prendra pm quatriéme proportionnelle à pk, pA, & pB, & le point m ſera à la courbe cherchée.

Si l'on augmente x (AP) juſqu'à ce qu'elle devienne $= AD = 2a$, l'équation deviendra $y = \pm \frac{2aa}{0}$, qui fait voir DF menée par D parallele à BH, & prolongée de part & d'autre à l'infini, ne rencontrera jamais la courbe, & lui ſera par conſequent aſymptote.

Si l'on veut déterminer le point E, où la courbe coupe la circonference du demi cercle, il n'y a qu'à faire $pm = pk$, c'eſt-à-dire, $y = \sqrt{2ax - xx}$, & mettant cette valeur de y dans l'équation précedente, l'on en tirera $x = \frac{1}{2}a$, c'eſt-à-dire que le point E eſt vis-à-vis le milieu de BD; & que par conſequent l'arc ED, eſt de 60 degrez.

EXEMPLE III.

Problême indéterminé.

FIG. 99. 6. *UNE ligne droite* GH *indéterminée de part & d'autre, & un point* D *hors de cette ligne, étant donnez de poſition ſur un Plan. Si l'on ajuſte l'axe* AE *d'une courbe quelconque* FAM *ſur la ligne* GH, *& qu'on applique au point fixe* D *une regle* DMF, *indéfinie de part & d'autre du point* D, *qui en tournant faſſe mouvoir la courbe* FAM *en pouſſant de côté ou d'autre un point déterminé* C *de ſon axe, le long de la ligne* GH, *les interſections* F & M *de la regle* DMF, *avec la courbe* FAM, *décriront par ce mouvement deux autres courbes, ou deux parties d'une courbe* KF & IM. *L'on propoſe de trouver des équations qui en expriment la nature.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, l'on menera du point D la ligne DE perpendiculaire à GH, ou à l'axe de la courbe FAM, & du point d'interſection M les lignes MP, MQ paralleles à DE & à AE: & ayant nommé les données DE, a; AC, b; & les indéterminées EP, ou QM, x; EQ, ou PM, y; AP, z; CP ſera, $z-b$; DQ, $a-y$; & les triangles ſemblables DQM, MPC donneront $a-y\ (DQ).x\ (QM) :: y\ (MP).z-b\ (PC)$, d'où l'on tire cette équation.

$A.\ xy = az - yz - ab + by$, qui eſt une équation generale pour la courbe IM, telle que puiſſe être la courbe FAM.

Si l'on change les ſignes des termes de l'équation A, où y ſe rencontre, l'on aura $-xy = az + yz - ab - by$, ou

$B.\ xy = -az - yz + ab + by$, qui eſt une équation generale pour la courbe KF: car l'inconnue $PM = y$, de poſitive qu'elle étoit, devient negative FO, $EP = x$, devient EO, & $AP = z$ devient AO. Ce qu'on peut aiſément prouver en cherchant une équation dans cette ſuppoſition: car CO étant à preſent, $b-z$; EC ſera $x+z-b$; & les triangles ſemblables DEC, FOC donneront $a\ (DE).x+z-b\ (EC) :: y\ (FO).b-z\ (CO)$, d'où l'on tire $xy = -az - yz + ab + by$, qui eſt l'équation B.

La nature de la courbe FAM étant donnée, l'on aura une équation qui exprimera la relation de ſes coordonnées AP, ou $AO\ (z)$ & PM, ou OF, (y), d'où l'on tirera une valeur de z que l'on ſubſtituera dans l'équation A, ou B; & l'équation qui en reſultera exprimera le nature de la courbe IM, ou KF, & en déterminera le genre.

Soit par exemple la courbe FAM une parabole du premier genre dont le parametre ſoit p, l'on aura (art. 10) $p \times AO$, ou $p \times AP = FO^2$, ou PM^2, ce qui eſt en termes algebriques $pz = yy$, d'où l'on tire $z = \frac{yy}{p}$, &

mettant en la place de z dans les équations A & B ſa valeur $\frac{yy}{p}$, l'on aura aprés avoir diviſé par y.

$$C.\ x = \frac{ay - yy}{p} + \frac{by - ab}{y}, \&$$

$$D.\ x = \frac{-ay - yy}{p} + \frac{by + ab}{y}.$$

L'équation C donne cette conſtruction. Soit menée par un point quelconque Q pris ſur DE la droite QM parallele à GH. Soit fait $p.\ DQ :: QE.\ \frac{DQ \times QE}{p}$; & $QE.\ DQ :: AC.\ \frac{DQ \times AC}{QE}$, & ayant fait $QM = \frac{DQ \times QE}{p} - \frac{DQ \times AC}{QE}$ le point M ſera à la courbe cherchée IM.

Ayant prolongé DE du côté de E vers S, & mené par un point quelconque R pris ſur ES la droite RF parallele GH; l'équation D donnera $RF = \frac{DR \times CA}{OF} - \frac{DR \times OF}{p}$, & le point F ſera à la courbe KF. Tout ceci eſt évident par la ſeule inſpection des équations C & D.

Si l'on fait $y = a$, l'équation C deviendra $x = 0$, ce qui fait voir que la courbe IM paſſe par le point D; & ſi l'on fait $y = 0$, l'équation C donnera $x = -\frac{ab}{0} + \frac{0}{p} = -\frac{ab}{0}$, qui montre que HG prolongée à l'infini du côté de G, eſt aſymptote à la courbe IM, & s'en approche de plus en plus à l'infini; & l'équation D donne $x = \frac{ab}{0} - \frac{0}{p} = \frac{ab}{0}$, qui montre que HG prolongée à l'infini du côté de H, eſt aſymptote à la courbe KF.

L'on a conſtruit ces équations en regardant y comme donnée, parceque ſi on on l'avoit regardée comme inconnue, & x comme donnée, la conſtruction auroit été plus compoſée, & auroit dépendu de la Geometrie ſolide: car l'équation auroit été du troiſiéme degré.

M^r Deſcartes a nommé * dans cette ſuppoſition, les courbes *IM* & *KF paraboloides*. * Geom. Liv. 3.

7. Si la courbe *FAM* devient un angle rectiligne dont le ſommet ſoit en *A*, la raiſon de *AP* à *PM*, ou de *AQ* à *OF* ſera conſtante ; qu'elle ſoit donc comme *b* à *c* (ſi *b* exprime *AC*, *c* exprimera la parallele à *DE* menée de *C* juſqu'à une des droites *AM*, ou *AF*), & l'on aura $z.y :: b.c$; d'où l'on tire $z = \frac{by}{c}$: & mettant cette valeur de z dans les équations *A* & *B*, l'on aura les deux ſuivantes,

$cxy = aby - byy - abc + bcy$, &

$cxy = -aby - byy + abc + bcy$, qui ſont deux équations à l'Hyperbole que l'on conſtruira par les régles de l'article 21, ou 22.

8. Mais en ce cas on peut avoir des équations bien plus ſimples en ſuivant les Obſervations de l'art. 4. Soient menées du point fixe *D* les droites *DE* paralleles à *AM* ; qui rencontrera *GH* en *E* ; *DP* parallele à *AF*, qui rencontrera *GH* en *O* ; & des points d'interſection *M* & *F*, les droites *MQ* & *FP* paralleles à *GH*, qui rencontreront *DE* & *DP* en *Q* & en *P* ; & ayant nommé les données *DE*, *a* ; *AC*, *b* ; *DO*, *c* ; & les inconnues *AE*, ou *MQ*, *x* ; *AM* ou *EQ*, *y* ; *AO* ou *FP*, *z* ; *AF*, ou *OP*, *u* ; *CE* ſera, $b + x$; *DQ*, $a - y$; *CO*, $z - b$; *DP*, $c + u$; & les triangles ſemblables *DEC*, *DQM* & *DOC*, *DPF* donneront, $a\,(DE).b + x\,(EC) :: a - y\,(DQ).x\,(QM)$, & $c\,(DO).z - b\,(OC) :: c + u\,(DP).z\,(PF)$, d'où l'on tire ces deux équations $by + xy = ab$, & $zu - bu = bc$, qui ſont à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, & que l'on conſtruira par les regles de l'article 22. FIG. 100.

9. Si la courbe *FAM* eſt un cercle dont le centre ſoit *C*, l'on aura en nommant les lignes comme on les a nommées n°. 6, $2bz - zz = yy$, d'où l'on tire $z = b + \sqrt{bb - yy}$; & mettant cette valeur de z dans les deux équations generales, l'on en aura deux autres, dont l'on tirera les deux qui ſuivent. FIG. 101.

$E.\ x = \pm \frac{\overline{a-y} \times \sqrt{bb-yy}}{y}$, &

$F.\ x = \pm \frac{\overline{a+y} \times \sqrt{bb-yy}}{y}$, qui ſont du quatriéme degré; & par conſequent les courbes IM, KF, dont elles expriment la nature, ſont du troiſiéme genre.

Ces deux équations preſentent une conſtruction aſſez ſimple pour décrire par des points les deux courbes IM, & KF: mais les interſections M & F du cercle FAM avec la regle mobile DMF, en donnent une encore plus ſimple: car ayant mené du point D une ligne quelconque DC, qui coupe GH en C, ſi l'on fait CM & CF chacune égale à la donnée b; les points M & F ſeront aux deux courbes IM & KF.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené des points M & F les droites MP, MQ, FO & FR paralleles à DE & à GH, les triangles ſemblables MPC, DQM, & FOC, DRF donnent,

$y\,(MP).\sqrt{bb-yy}\,(PC) :: a-y\,(DQ).x\,(QM)$, &

$y\,(FO).\sqrt{bb-yy}\,(OC) :: a+y\,(DR).x\,(RF)$, d'où l'on tire les équations E & F. $C.Q.F.D.$

Les deux équations E & F font voir que les courbes IM & KF paſſent de l'autre côté de leur axe DE par rapport à C, & que leurs parties qui ſont des deux côtez de DE, ſont égales & ſemblables.

Si l'on fait $y = o$, l'on aura $x = \pm \frac{ab}{o}$, d'où l'on voit que GH prolongée de part & d'autre à l'infini, eſt aſymptote aux deux courbes IM & KF.

Si l'on fait $x = o$, l'équation E ſe changera en ces deux ſuivantes $yy - 2ay + aa = o$, & $bb - yy = o$, d'où l'on tire $y = a$, & $y = \pm b$; il ſuit de la ſeconde $y = \pm b$, que les deux courbes IM & KF coupent l'axe DE en deux points I & K, qui ſont éloignez du point E de la grandeur du demi diametre CM. Il ſuit de la premiere

$y = a$, que la courbe IM peut paſſer par le point fixe D, ce qui arrive lorſque $b = a$, & lorſque b ſurpaſſe a avec cette difference, que lorſque $b = a$, elle coupe l'axe DE au ſeul point D; & lorſque b ſurpaſſe a, elle le coupe au point D, & en un autre point plus éloigné de E que le point D, de ſorte qu'elle fait en ce cas une eſpece de nœu, & eſt ſemblable à la courbe du Problême précedent. L'on auroit connu la même choſe par le moyen de l'équation F.

Nicomede auteur de cette courbe l'a nommée *Coucoïde*, & le point D, le pole de la Coucoïde.

EXEMPLE IV.

Problême indéterminé.

10. *UN angle droit* ABH, *& un point fixe* A, *ſur un de ſes côtez* AB *étant donez. Il faut trouver dans cet angle le point* M, *en ſorte qu'ayant mené du point* A *par* M, *la ligne* AMG *qui rencontre l'autre côté* BH *en* G, *& du même point* M, *la ligne* MP *parallele à* BH, MG *ſoit égale à* AP. FIG. 102.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée AB, a; & les inconnues AP, ou (Hyp.) MG, x; PM, y; BP ſera, $a - x$; $AM \sqrt{xx + yy}$; & l'on aura à cauſe des paralleles BG, PM. x (AP). $\sqrt{xx+yy}$ (AM) :: $a - x$ (PB). x (MG), d'où l'on tire après les réductions ordinaires, $y = \pm \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$, qui eſt une équation du quatriéme degré; & par conſequent la courbe dont elle exprime la nature, eſt du troiſiéme genre.

On voit par cette équation que la courbe a deux parties égales & ſemblables, l'une d'un côté de ſon axe AB, & l'autre de l'autre.

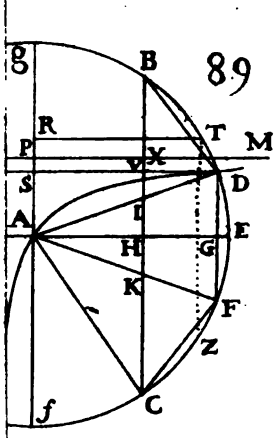
Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = \frac{1}{2}a$, d'où il ſuit que

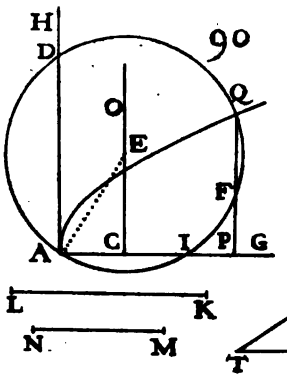
la courbe coupe AB par le milieu en C, & qu'elle ne la rencontre en aucun autre point; puiſqu'on ne trouve qu'une ſeule valeur pour x. Si l'on fait $x = 0$, l'on aura $y = \frac{0}{a}$ qui pourroit faire penſer que la courbe paſſe auſſi au point A, puiſque y y devient nulle: mais on en eſt deſabuſé, lorſqu'on fait x moindre qu'un $\frac{1}{2}a$, ou négative : car alors les valeurs de y deviennent imaginaires; c'eſt pourquoi la courbe ne rencontre AB qu'au ſeul point C.

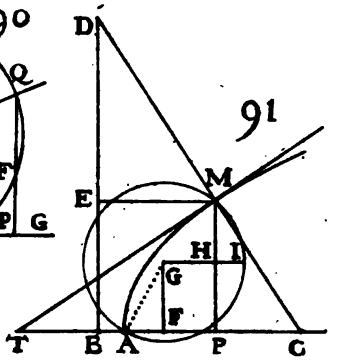
Si l'on fait $x = a$, l'on aura $y = \pm\frac{aa}{0}$, ce qui fait voir que la ligne BH prolongée de part & d'autre à l'infini, eſt aſymptote à la courbe.

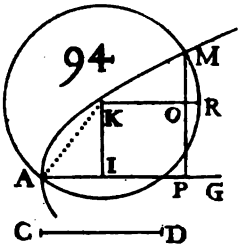
Si l'on ſuppoſe que x ſurpaſſe a, ce qui eſt poſſible; le dénominateur $a - x$ du membre fractionnaire de l'équation, deviendra une quantité négative; c'eſt pourquoi les valeurs poſitives de y deviendront négatives, & les négatives deviendront poſitives; mais pour les laiſſer dans l'état où elles ſont, il n'y a qu'à changer les ſignes du dénominateur $a - x$, & l'on aura $y = \pm\frac{x\sqrt{2ax - aa}}{x - a}$, d'où l'on voit que la courbe a encore deux parties qui ſont au-delà de l'aſymptote BH, dans les deux angles HBD, IBD faits par le prolongement BD de l'axe AB, & par la ligne HBI; que ces deux parties ont encore pour aſymptote la ligne HBI: car ſi l'on fait dans la derniere équation $x = a$, l'on aura $y = \pm\frac{aa}{0}$, & que ces deux mêmes parties ne rencontrent point la ligne BD prolongée: car rien n'empêche d'augmenter x à l'infini, ſans que les racines de y deviennent nulles ou imaginaires, ce qu'on a déja remarqué en faiſant $y = 0$. Les deux équations précedentes $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$, & $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{x - a}$ fourniſſent cette conſtruction. Soit $2ax - aa = zz$, qui eſt une équation

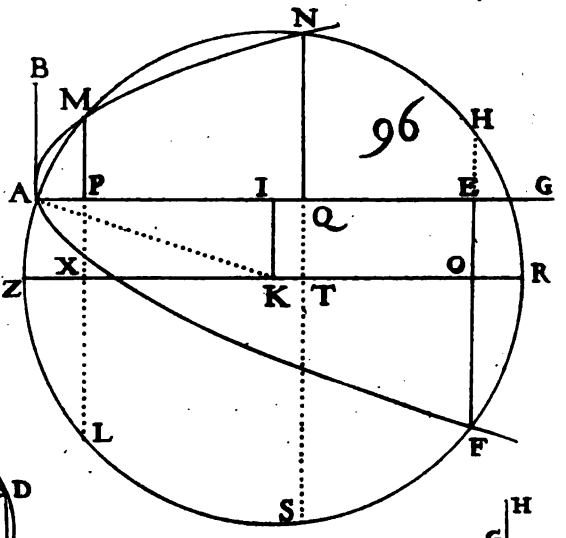
à

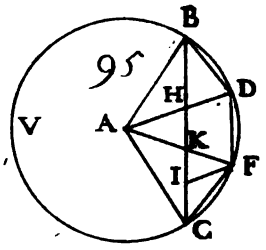

89
g
B
R
T
M
P
X
V
S
D
A
I
E
H
G
K
F
Z
f
C

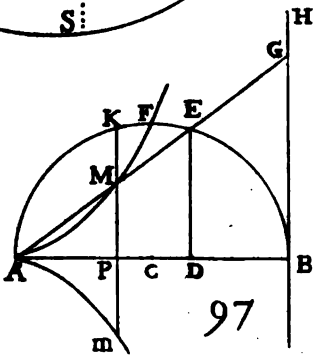

90
H
D
O
Q
E
F
A
C
I
P
G
L
K
N
M

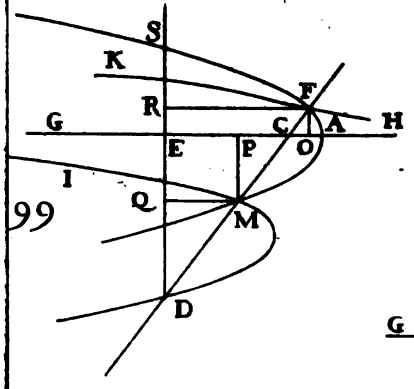

91
D
M
E
H
I
G
F
T
B
A
P
G

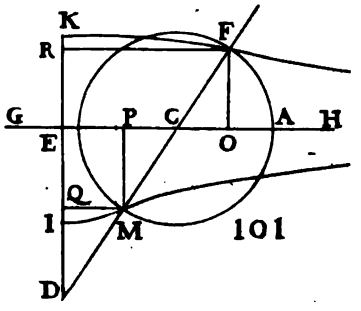

94
M
K
O
R
A
I
P
G
C
D


96
N
B
M
H
A
P
I
E
G
Q
X
O
R
Z
K
T
L
F
S

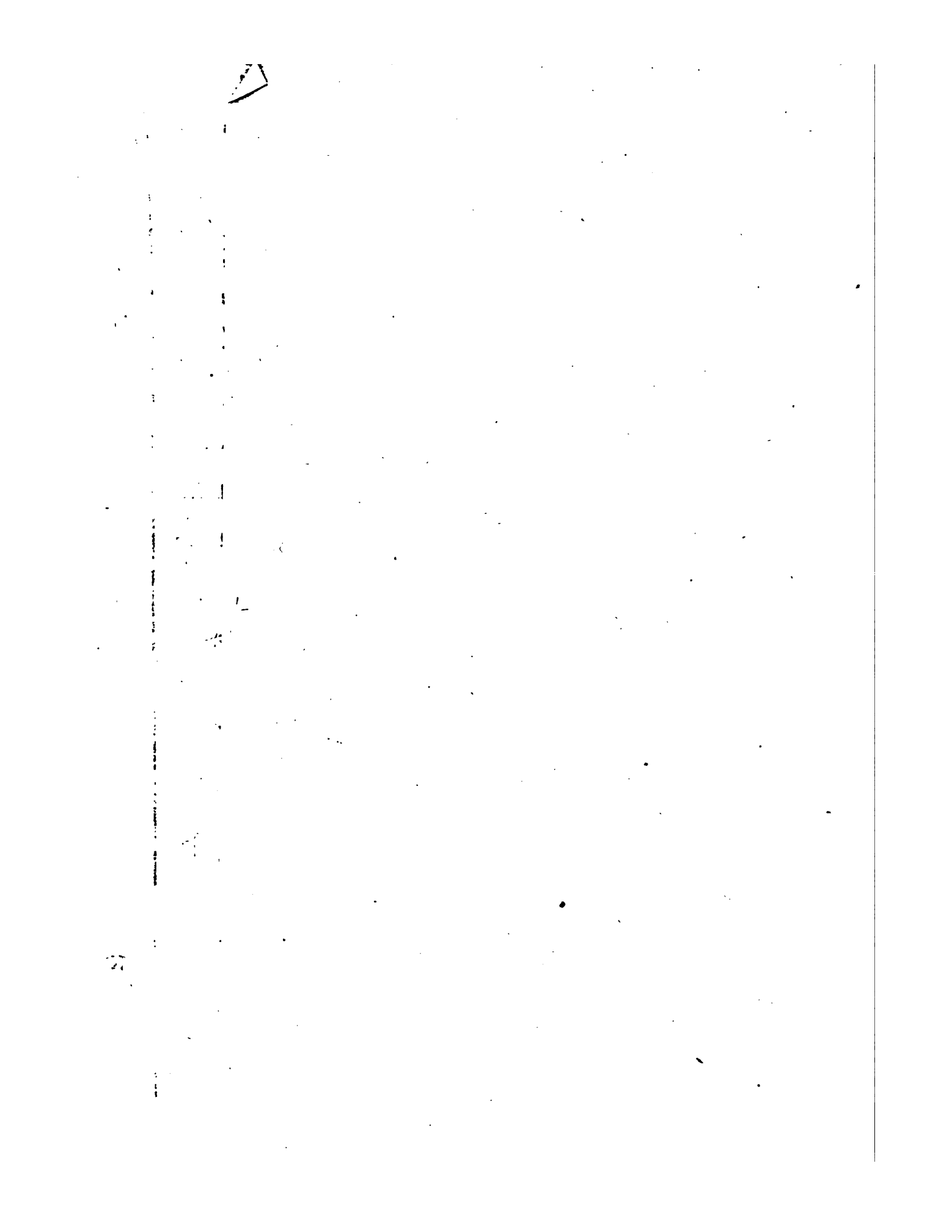

95
B
H
D
V
A
K
I
F
C


H
G
K
F
E
M
A
P
C
D
B
m
97


S
K
F
R
G
C
A
H
E
P
O
I
Q
99
M
D


K
F
R
G
P
C
A
H
E
O
Q
I
M
101
D

Pl. V. p. 224



à la parabole, qui étant construit suivant les régles de l'art. 19, aura pour sommet le point C, & pour axe la ligne CD. Ayant mené d'un point quelconque P pris sur CD, une ligne PK parallele à BH, qui rencontrera la parabole en K, soit prise PM quatriéme proportionnelle à BP, PA, & PK, & le point M sera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

ELLE est claire par l'équation précedente.

Cette construction, & l'équation à la courbe, font voir que les deux parties de la courbe qui sont dans les angles HBD, IBD ne rencontrent point la parabole CK : car lorsque le point P se trouve au-delà de B par rapport à A, BP est toujours moindre que PA ; & par consequent PK moindre que PM. On voit la même chose par l'équation : car si l'on fait l'appliquée PK de la parabole égale à l'appliquée PM de la courbe, c'est-à-dire $\sqrt{2ax - aa} = y$, en mettant cette valeur de y dans l'équation à la courbe, l'on en tirera $x = \frac{1}{2}a$, qui marquent que ces deux appliquées ne peuvent être égales qu'en un seul point C, ou elles sont nulles, ou $= 0$, & que par consequent la courbe ne rencontre la parabole qu'au seul point C.

On voit aussi de ce que $PB . PA :: PK . PM$ que plus le point P s'éloigne de B, allant vers D, plus les points K & M s'approchent l'un de l'autre ; de sorte que si l'on suppose le point P infiniment éloigné de B, PB sera pour ainsi dire égale à PA ; & partant aussi $PK = PM$, d'où il suit que la Parabole CK, & la courbe CMM, sont asymptotes l'une à l'autre.

EXEMPLE V.

Problême indéterminé.

11. *DE'CRIRE la Courbe dont la nature eſt exprimée par l'équation ſuivante, qui eſt du quatriéme degré, & où les deux inconnues* x *&* y, *ſont élevées au-deſſus du ſecond* $x^4 - ayxx + byyx + cy^3 = o$.

En aſſignant à *y* une valeur arbitraire, on regardera cette équation comme une équation déterminée du quatriéme degré, & formant, ſelon les regles de la Section précedente, une équation à la parabole, par exemple $az = xx$; & mettant dans l'équation précedente pour xx ſa valeur az, l'on aura $aazz - aayz + byyx + cy^3 = o$, ou $zz - yz + \frac{byyx + cy^3}{aa} = o$, qui eſt une autre équation à la parabole; on combinera ces deux équations à la parabole pour avoir une équation au cercle; on conſtituera cette équation au cercle avec la premiere équation à la parabole, qui eſt la plus ſimple, & les points d'interſection détermineront les valeurs de *x* correſpondantes à celles que l'on aura aſſignées à *y*, que l'on prend pour l'axe de courbe qu'on veut décrire, & ayant appliqué ces valeurs de *x*, à l'endroit de l'axe où ſe termine la valeur aſſignée à *y*, l'on aura autant de points de la courbe cherchée que l'on aura trouvé de valeurs pour *x* poſitives & négatives; & de cette maniere, en aſſignant ſucceſſivement differentes valeurs à *y*, l'on aura differens points de la même courbe. Où l'on remarquera que l'équation à la parabole $az = xx$, ne renfermant point l'indéterminée *y*, la même parabole ſervira toujours dans tous les changemens de valeurs que l'on aſſignera à *y*. Il n'y aura donc que le cercle dont la grandeur variera ſelon que l'on augmentera, ou que l'on diminuera la valeur de *y*.

L'on s'eſt déterminé à prendre *y* pour donnée, quoique ces dimenſions ſoient moindres que celles de *x*, par-

ceque y a un ſecond terme dans l'équation, & x n'en a point, outre que la conſtruction eſt la même, ſoit que l inconnue ait quatre dimenſions, ou qu'elle n'en ait que trois.

Si les deux inconnues x & y avoient eu chacune un ſecond terme, l'on auroit pris indifferemment l'une ou l'autre pour conſtante, & l'on auroit fait évanouir le ſecond terme de celle que l'on auroit priſe pour inconnue, afin de faire toujours ſervir le cercle dans la conſtruction.

Si l'une des deux inconnues étoit élevée au-deſſus du quatriéme degré, on décriroit encore la courbe par le moyen de la parabole & du cercle, ſi l'autre inconnue étoit du troiſiéme ou du quatriéme; mais on la décriroit par le moyen du cercle ſeul, ſelon les reglés de Section ſeconde, ſi elle n'avoit qu'une ou deux dimenſions, en prenant dans l'un & l'autre cas celle qui excede le quatriéme degré pour conſtante.

Si dans une équation indéterminée, les deux inconnues excedent le quatriéme degré, le cercle ne pourra plus ſervir pour décrire la courbe; il faudra alors former une équation à la premiere parabole cubique, par le moyen d'une nouvelle inconnue, & de celle de l'équation dont on veut trouver les valeurs, c'eſt-à-dire, de celle que l'on ne prend point pour conſtante.

On ſubſtituera dans l'équation propoſée, en la place des troiſiéme, ſixiéme, neuviéme, *&c.* puiſſances de l'inconnue que l'on ne prend point pour conſtante, leurs valeurs tirées de l'équation à la parabole cubique; ce qui donnera une équation à une courbe qui ſervira avec l'équation à la parabole cubique, à décrire la courbe dont l'équation propoſée exprime la nature, comme on va voir par l'exemple qui ſuit.

EXEMPLE VI.

Problême indéterminé.

12. *DÉCRIRE la courbe dont la nature eſt exprimée par l'équation ſuivante, qui eſt du ſixiéme degré, & où les inconnues* x *&* y *ſont toutes deux élevées au-deſſus du quatriéme.*

$$x^6 + ayx^4 - byyx^3 + bcyx + y^6 = 0,$$

En prenant y pour conſtante, & la ligne qu'elle exprime pour l'axe de la courbe qu'on veut décrire, l'on ſera $aaz = x^3$; donc $a^4zz = x^6$, & ſubſtituant dans l'équation propoſée en la place de x^6, & de x^3 leurs valeurs a^4zz, & aaz, l'on aura celle qui ſuit.

$a^4zz + a^3zyx - aabzyy + bcy^3x + y^6 = 0$, qui eſt une équation ou l'inconnue x, n'a qu'une dimenſion; & que l'on conſtruira par conſequent par les regles de la Section ſeconde, & les Interſections avec la parabole cubique, que l'on décrira auſſi par les mêmes regles puiſque l'inconnue z, n'a auſſi qu'une dimenſion, donneront les valeurs de x correſpondantes à celles que l'on aura aſſignées à y. Il en eſt ainſi des autres équations plus compoſées.

Mais au reſte de quelque genre que puiſſe être une courbe, il eſt rare que l'on ne puiſſe pas trouver une maniere de la décrire, plus ſimple que celle qu'on tire de ſon équation, en ſuivant les regles preſcrites n° 2 & 3, ou autrement.

COROLLAIRE.

13. IL eſt clair qu'on peut conſtruire les équations déterminées où l'inconnue eſt élevée au-deſſus du quatriéme degré comme on vient de dire, en formant une équation à la parabole cubique avec une nouvelle inconnue, & celle de l'équation: car aprés les ſubſtitutions l'on pourra toujours avoir une équation à une courbe où l'inconnue de l'équation propoſée n'excedera pas le ſecond degré; & la courbe dont cette équation exprime la nature, & la parabole cubique étant décrites, leurs interſections détermineront les valeurs ou racines de l'inconnue de l'équation propoſée. Il eſt pourtant certain qu'un Problême de cette nature ſera toujours conſtruit plus élegamment, lorſqu'ayant employé deux inconnues pour le réſoudre, on le conſtruira avec les deux premieres équations dans leſquelles on ſera tombé à la maniere de ceux de la Section neuviéme, comme on va voir par l'exemple qui ſuit.

EXEMPLE

De la conſtruction des Problêmes dont les équations déterminées excedent le quatriéme degré.

Problême.

14. *UN angle droit* ABH, *& un point fixe* A *ſur un de ſes côtez, étant donnez; il faut trouver au-dedans un point* M, *d'où ayant abbaiſſé ſur* AB *la perpendiculaire* MP, *le rectangle* AP × PM, *ſoit égal à* AB²; *& qu'ayant mené du point* A *par le même point* M *la droite* AMC *qui rencontre* BH *en* C, AM *ſoit égale à* BC. FIG. 103.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée AB, a; & les inconnues AP, x; PM, y; AM ſera $\sqrt{xx+yy}$; & l'on aura par la premiere condition du Problême $xy = aa$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes.

A cauſe des triangles ſemblables APM; ABC, l'on a, $AP(x).PM(y)::AB(a).BC = \frac{ay}{x}$ = (Hyp.) $\sqrt{xx+yy} = AM$, ou en quarant les deux membres, & multipliant par xx, $aayy = x^4 + xxyy$, qui eſt une équation à une courbe du troiſiéme genre, d'où faiſant évanouir y par le moyen de l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, l'on aura $a^6 = x^6 + a^4xx$, qui eſt une équation déterminée du ſixiéme degré.

Pour la conſtruire par le moyen de l'équation déterminée $a^6 = x^6 + a^4xx$, ſoit fait $aaz = x^3$, qui eſt une équation à la premiere parabole cubique; & mettant dans l'équation $a^6 = x^6 + a^4xx$, en la place de x^3 ſa valeur aaz, elle deviendra $aa = zz + xx$, qui eſt une équation au cercle.

Soit preſentement F l'origine des inconnues des deux équations au cercle, & à la parabole cubique z; qui va vers G, & x qui lui eſt perpendiculaire, & va en haut. Si du point F pour centre & pour rayon $AB = a$, l'on dé- FIG. 104.

crit un cercle ; & ſur la même FG pour axe, dont le ſommet eſt F, & le parametre a, la parabole cubique KFN ; elle coupera le cercle en deux points K & N, & la perpendiculaire NQ ſera la valeur poſitive de x, & KL ſa valeur negative qui ſera égale à la poſitive, de ſorte qu'ayant fait $AP = NQ$, le point P ſera un des points cherchez.

FIG. 103. 104.

DEMONSTRATION.

PAR la proprieté de la parabole cubique (art. 9 n° 18) $FQ \times aa = QN^3$, ou en termes algebriques $aaz = x^3$, qui montre que cette parabole, n'eſt pas ſemblable à la parabole ordinaire, & que ſes deux parties vont l'une d'un côté, & l'autre de l'autre de l'axe FG d'un ſens contraire : car l'on tire de ſon équation $x = \sqrt[3]{aaz}$, qui fait voir que x, n'a qu'une ſeule valeur qui eſt poſitive : mais ſi l'on fait z negative, l'on aura $x^3 = -aaz$, où x n'a qu'une ſeule valeur qui eſt negative. Maintenant par la proprieté du cercle, l'on a $FI^2 - FQ^2 = QN^2$, ou en termes algebriques $aa - zz = xx$, où $a^6 - x^6 = a^4xx$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. C. Q. F. D.

Mais pour réſoudre entierement le Problême, il faut encore déterminer la grandeur de $PM = y$; c'eſt pourquoi reprenant l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, qui eſt la plus ſimple des deux premieres qu'on a trouvées, l'on en tirera $y = \frac{aa}{x}$, qui eſt une équation déterminée du premier degré à cauſe de x dont la valeur vient d'être trouvée ; c'eſt pourquoi ſi l'on prend PM troiſiéme proportionnelle à AP & à AB, le point M ſera celui que l'on cherche.

On pourra auſſi conſtruire cette équation $a^6 = x^6 + a^4xx$ par le moyen du cercle & de la parabole ordinaire : car ayant fait $af = xx$, l'équation déterminée deviendra $a^3 = f^3 + aaf$, en mettant pour xx ſa valeur af, qui eſt une

équation du troiſiéme degré, que l'on conſtruira par les regles de la Section neuviéme ; & aprés avoir trouvé par ce moyen la valeur de f, l'on aura celle de $x = AP$ qui eſt une moyenne proportionnelle entre a & f : cela fait, il faudra encore déterminer la grandeur de $PM = y$ comme on vient de faire.

Pour conſtruire preſentement le Problême avec les deux premieres équations $xy = aa$, & $aayy = x^4 + xxyy$; l'origine des inconnues x & y, dans l'une & dans l'autre, étant au point A, x allant vers B, & y parallele à BH ; ayant fait $BH = AB = a$, & mené AS parallele à BH, l'on décrira par A entre les aſymptotes AB, AS l'Hyperbole HM. FIG. 105.

L'énoncé du Problême donne une deſcription tres-ſimple de la courbe AM dont l'équation $aayy = x^4 + xxyy$ exprime la nature, & cette courbe coupera l'Hyperbole HM au point cherché M. La Démonſtration en eſt claire, & l'on voit que cette conſtruction réſout pleinement, naturellement, & tres-élegamment le Problême.

On pourroit regarder ce Problême, comme un Probleme ſolide, puiſqu'on la conſtruit avec le cercle, & la parabole ordinaire : mais on a jugé à propos de le faire ſervir d'exemple pour la conſtruction des Problêmes dont les équations excedent le quatriéme degré.

Si on examine la nature de la courbe AM par le moyen de ſon équation, l'on en tirera une deſcription aſſez ſimple, & l'on trouvera qu'elle touche ſon axe AB au point A, & qu'elle a pour aſymptote la droite BH, &c.

REMARQUES GENERALES.

Sur la conſtruction des Problêmes déterminez & indéterminez.

15. LES Problêmes déterminez tels qu'ils puiſſent être, ont toujours autant de ſolutions que les deux lignes, droites ou courbes, qui ſervent à les réſoudre, ont de points communs ou d'interſections ; & ſi ces deux lignes ne ſe ren-

contrent point, le Problême ſera impoſſible.

On pourroit auſſi ſe ſervir de l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, au lieu de l'équation à la parabole $ay = xx$, pour tirer des équations indéterminées des équations déterminées, du troiſiéme & du quatriéme degré, & de l'équation à l'Hyperbole cubique $xxy = a^3$, au lieu de l'équation à la parabole cubique $aay = x^3$, pour conſtruire les Problêmes déterminez dont les équations excedent le quatriéme degré. Enfin les Problêmes déterminez conſtruits de la maniere que nous avons propoſée, ſeront toujours conſtruits avec les courbes les plus ſimples qu'ils le puiſſent être.

16. Pour décrire les courbes du premier genre, on a réduit leurs équations à un certain état : on n'a point fait la même choſe pour décrire celles des genres plus compoſez, parcequ'il y en a une trop grande quantité dans chaque genre. Il peut neanmoins arriver qu'en changeant l'origine, ou la poſition de leurs axes, ou ce qui revient au même, de leurs coordonnées, les équations en deviendront plus ſimples, & par conſequent auſſi leur conſtruction. Or ces changemens ſe font de la même maniere que ceux qui ſe font par les réductions, comme on a vû dans toute l'étendue de la Section huitiéme, en égalant une de leurs inconnues + ou — une quantité connue à une nouvelle inconnue, & ſubſtituant dans l'équation la valeur de l'inconnue que l'on en veut faire évanouir, ce qui donnera une équation dont la forme ſera dffierente de la premiere. On peut faire la même choſe ſur l'autre inconnue.

On peut encore non-ſeulement changer l'origine des coordonnées : mais on peut auſſi changer l'angle qu'elles font entr'elles, & leur faire faire tel angle qu'on voudra, comme l'on a fait en pluſieurs endroits de la même Section huitiéme.

SECTION

SECTION XII.

Des Courbes méchaniques, ou tranſcendentes, de leur deſcription, & des Problêmes qu'on peut conſtruire par leur moyen.

XXVI. TOUTES les Courbes geometriques rentrent en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini; de maniere que leurs axes, ou leurs coordonnées les rencontrent en un nombre déterminé de points, ce qui fait que les lettres indéterminées des équations qui en expriment la nature, ou, ce qui eſt la même choſe, qui expriment la relation que leurs coordonnées ont entr'elles, ont un nombre déterminé de dimenſions, & qu'on peut par conſequent trouver tous les points de ces Courbes geometriquement, c'eſt-à-dire, par l'interſection de deux lignes geometriques droites, ou courbes.

Toutes les Courbes méchaniques rentrent auſſi en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini; mais on ne peut point trouver d'équations qui expriment geometriquement la relation de leurs coordonnées: car il y a des Courbes mechaniques dont une des coordonnées eſt une ligne droite, & l'autre une ligne courbe dont la rectification eſt geometriquement impoſſible. Il y en a d'autres dont les coordonnées ſont deux lignes courbes; d'autres dont les appliquées partent toutes d'un même point, & d'autres qui ſont figurées de maniere que leurs axes les rencontrent en une infinité de points; d'où il ſuit qu'afin qu'une équation en pût exprimer la nature; il faudroit qu'au moins une de ſes inconnues eût une infinité de dimenſions, ce qui eſt impoſſible; & c'eſt pour cela que ces Courbes ſont auſſi nommées tranſcendentes.

Il ſuit de tout ceci que l'on ne peut geometriquement trouver tous les points des Courbes méchaniques, puiſ-

que leurs équations n'en expriment que méchaniquement la nature.

Il y a même des Courbes méchaniques dont on ne connoît que certaines proprietez, d'où l'on ne peut tirer d'équations en termes finis. Il faut alors avoir recours à l'infini, en regardant les Courbes comme des Polygones d'une infinité de côtez, & en comparant les côtez d'un triangle infiniment petit, formé par une petite portion de la Courbe compriſe entre deux appliquées infiniment proches, par la difference de ces deux appliquées, & par la diſtance de l'une à l'autre, & que l'on regarde comme un triangle rectiligne, aux côtez d'un grand triangle formé par la tangente, ou la perpendiculaire, par l'appliquée, & par la ſoûtangente, ou par la ſoûperpendiculaire, & les équations que l'on tire de la comparaiſon des côtez de ces deux triangles, ſont nommées *équations differentielles*; parceque les cotez du petit triangle ſont les differences de la Courbe, des deux appliquées infiniment proches, & des deux abſciſſes qui correſpondent à ces deux appliquées.

On n'entreprend point ici de donner une Theorie complete des Courbes méchaniques; mais plûtôt une ſimple explication de celles qui ſe rencontrent le plus ordinairement dans les Ouvrages des Geometres, & particulierement dans l'excellent Livre de l'Analiſe des Infiniment Petits de feu *Monſieur le Marquis de l'Hôpital*, où il ſuppoſe que ſon Lecteur connoiſſe toutes les Courbes dont il explique les plus belles proprietez.

PROPOSITION L

Fig. 105. 1. SOIT un cercle ABP, dont le centre eſt C, & un rayon CA. Si l'on conçoit que le rayon CA faſſe un tour entier autour de ſon extremité immobile C, de maniere que le point A ſe meuve uniformement ſur la circonference de A par B en A, pendant qu'un point mobile parcourera auſſi d'un mouvement uniforme, le rayon CA allant de C en A; ce point décrira par la compoſition de

ces deux mouvemens, une Courbe $CDMA$, qui aura cette proprieté dans toutes les ſituations de AC, par exemple en celle de CP, que la circonference entiere ABA ſera à ſa partie ABP: comme CA ou CP à CM, ou (ayant nommé CA, a; ABA, c; ABP, x; CM, y;) $c.x::a.y$, d'où l'on tire $ax=cy$.

Si l'on ſuppoſe que le rayon CA faſſe encore un, ou pluſieurs tours, le point décrivant parcourera pendant chaque tour, ſur CA prolongée, des parties comme AE égales à CA, & la courbe ſera autant de tours autour d'elle-même, que CA en aura fait; & comme on peut ſuppoſer que le rayon CA faſſe une infinité de tours; il ſuit que la Courbe peut le rencontrer en une infinité de points; & que par conſequent elle eſt méchanique, ou tranſcendente.

Archimede Auteur de cette Courbe l'a nommée *Spirale*.

Pour la décrire, ayant diviſé la circonference ABA, & le demi diametre CA en un nombre égal de parties égales, & mené CP à quelqu'une des diviſions, on portera de C en M autant de parties de CA, que ABP en contient, ou de P en M, autant de parties de CA que AFP en contient; & de l'une ou de l'autre maniere le point M ſera à la Courbe CDM: car l'on aura toujours $ABA.ABP::CA.CM$, ou $ABA.AFP::CA.PM$.

On décrira de même le 2. tour, en portant ſur le prolongement de CP autant de parties de CA que ABP en contient, & ainſi des autres, en décrivant pour chaque tour un cercle dont le rayon ſoit double, triple, *&c.* du rayon CA.

Si l'on ſuppoſe que le rayon CA, & le point décrivant, ſe meuvent avec des viteſſes qui ſoient en telle raiſon qu'on voudra, c'eſt-à-dire, que ces viteſſes ſoient telles que l'on ait toujours $ABA^m.ABP^m::CA^n.CP^n$, ou $c^m.x^m::a^n.y^m$, d'où l'on tirera $a^n x^m = c^m y^n$, qui eſt une équation pour toutes les Spirales à l'infini.

Ce ſeroit la même choſe ſi le rayon AC tournoit autour du point C d'un ſens contraire, de A par F vers P,

pendant que le point mobile descendroit de A vers C, en supposant les vitesses telles qu'on les vient de supposer: car nommant AFP, x; & PM, y; l'on auroit encore $c^m . x^m :: a^n . y^n$, ou $a^n x^m = c^m y^n$, qui est l'équation précedente.

Si m & n signifient des nombres positifs, les spirales seront nommées *paraboliques*; & si l'une des deux signifie un nombre négatif, elles seront nommées *hyperboliques*; parceque si c & x exprimoient des lignes droites aussi-bien que a & y, ces équations appartiendroient à la parabole dans le premier cas, à l'hyperbole dans le second. Par exemple, si $m = 1$, & $n = 2$, l'on aura $aax = cyy$. Si $m = 1$, & $n = -1$, l'on aura $xy = ac$. Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $xxy = acc$, &c. L'on décrira ces Courbes comme si elles étoient geometriques, en supposant la quadrature du cercle.

PROPOSITION II.

FIG. 106. 2. SOIT un quart du cercle ADB, dont le centre est C, & les rayons CA & CB. Si l'on conçoit que le rayon CA se meuve uniformement autour du centre C, jusqu'à ce qu'il arrive en CB, & que pendant ce temps-là une perpendiculaire PM au rayon CA, partant du point A, parcourre aussi uniformement le rayon AC, en demeurant parallele à CB; l'intersection M du rayon CA qui devient CD, & de la perpendiculaire PM, décrira une courbe AME, qui sera telle que $ADB . AD :: AC . AP$. *Diocles*, son Auteur, l'a nommée *Quadratice*.

FIG. 107. 3. Si le rayon AC au lieu de se mouvoir autour du centre C, se mouvoit parallele à lui-même, de sorte qu'étant parvenu dans une situation quelconque DF, l'on ait toujours $ADB . AD :: AC . AP$; l'intersection M de la parallele DF avec la perpendiculaire PM, décriroit la Courbe AMB, que *Monsieur Tchirnhausen* a aussi nommée *Quadratrice*.

FIG. 106. 107. Si l'on nomme AC, a; ADB, c; AD, x; AP, y; l'on aura $c . x :: a . y$; donc $ax = cy$, pour l'équation commune à ces deux courbes.

PROPOSITION III.

4. SOIENT deux cercles AFB, ALI égaux ou inégaux, qui ſe touchent en A, dont les centres ſoient C & H, & les rayons CA, ou CB & HA: ſoit de plus un point fixe D, pris ſur le rayon CB prolongé, ou non prolongé. FIG. 108.

Si l'on ſuppoſe preſentement que le cercle AFB roule ſur le cercle ALI, juſqu'à ce que le point B ſoit parvenu en T, le point D décrira par ce mouvement une portion de Courbe DMS, que l'on appelle *demi Epicycloïde*, ou *demi Roulette.*

Pour trouver une équation qui renferme quelque proprieté de cette courbe, ſuppoſons que le demi cercle mobile AFB, ſoit parvenu en roulant dans la ſituation KLP dont le centre ſoit O, le point D ſera alors en M, qui eſt un des points de la courbe, & le point B ſera en P. Ayant décrit du centre C par D le demi cercle DGE, du centre H par M l'arc MG, qui rencontrera la demi circonference DGE en G, l'on menera du centre H du cercle immobile ALI, les droites HM, qui coupera en I le cercle ALI, HLO qui paſſera par le point touchant L, & HG qui coupera l'arc ALI en R, & du centre C du demi cercle mobile AFB, la droite CG qui coupera AFB en F.

Il eſt clair que les triangles HCG, HOM ſont égaux, & équiangles: car $HC = HO$, $HG = HM$, & $CG = OM$: c'eſt pourquoi les angles CHG, OHM ſeront égaux, & partant l'arc RI = l'arc AL = (Hyp.) l'arc LK = (à cauſe de l'angle $HOM = HCG$) l'arc FB.

Nommant donc les données CB, ou CF, ou LO, *&c.* a; BD, ou MP, ou AE, b; HA, ou HI, *&c*, c; l'arc DG, x; l'arc MG, y; & l'appliquée HM, z; CD ſera, $a+b$; & les ſecteurs ſemblables CDG, CBF, donneront

$$CD\,(a+b).\,CB\,(a) :: DG\,(x).\,BF = \frac{ax}{a+b} = RI;$$

& à cauſe des ſecteurs ſemblables HMG, HIR, l'on a

$z(HM).c(HI)::y(HG).\frac{ax}{a+b}(IR)$, d'où l'on tire $cy=\frac{axz}{a+b}$, ou $acy+bcy=axz$.

COROLLAIRE I.

5. IL eſt clair que lorſque le point B, ou P touchera le cercle ALI en un point T, l'arc ALT ſera égal à la demi circonference AFB, & le point décrivant D ou M ſera ſur le rayon HT en S, de ſorte que $ST=BD$.

COROLLAIRE II.

6. SI le point décrivant D étoit entre C & B, le cercle DGE ſeroit interieur au cercle AFB, & lorſque le point B, ou P ſeroit parvenu en T, le point décrivant D, ou M, ou, ce qui eſt la même choſe, le point S de la Courbe ſeroit ſur le rayon HT prolongé au-delà de T de la longueur de BD, & l'équation précedente deviendroit $acy-bcy=axz$: car $BD=b$ deviendroit négative de poſitive qu'on l'a ſuppoſée.

COROLLAIRE III.

7. SI le point D étoit en B, ou ce qui eſt la même choſe, ſi B devenoit le point décrivant, le cercle DGE ſe confondroit avec le cercle AFB, & le point S de la Courbe tomberoit en T, ou le point B toucheroit le cercle ALI; & en ce cas $DB=b$ devenant nulle, ou $=0$, l'équation deviendroit $cy=xz$.

COROLLAIRE IV.

8. SI l'on ſuppoſe que le point H s'éloigne infiniment de A dans la ligne AB, le cercle ALI deviendra une ligne droite perpendiculaire ſur AB au point A; l'arc GM, une autre droite parallele à ALI; & les rayons AH & MH, deviendront infinis, & par conſequent paralleles & égaux; c'eſt pourquoi c ſera égale à z, & l'équation précedente (n°. 4) ſe changera en celle-ci $ay+by=ax$,

en la diviſant par les quantitez égales c & z, & faiſant de nouveau les mêmes raiſonnemens que l'on vient de faire dans les trois premiers Corollaires, l'équation du ſecond deviendra $ay - by = ax$; celle du troiſiéme deviendra $y = x$.

La Courbe DMS, eſt en ce cas nommée, *demi Cycloïde* ou *demi Roulette à Baſe droite.*

COROLLAIRE V.

9. SI le cercle AFB au lieu de rouler, gliſſoit ſur la ligne AL droite, ou circulaire, en ſorte que le point touchant A parcourût d'un mouvement uniforme la ligne $ALT = AFB$, pendant que le point décrivant D parcoureroit auſſi d'un mouvement uniforme la demi circonference $DGE >, <,$ ou $= AFB$, & en lui demeurant concentrique. Il eſt clair que la demi roulette décrite par ces mouvemens, ſeroit la même que ſi le cercle AF rouloit ſur la ligne ALT.

COROLLAIRE VI.

10. MAIS ſi le point décrivant D employe plus de temps à parcourir uniformement la demi circonference DGE, que le point touchant A n'en employe à parcourir auſſi uniformement $ALT = AFB$, la demi roulette ſera nommée *Alongée.*

Si au contraire le point D employe moins de temps à parcourir DGE, que le point A n'en employe à parcourir $ALT = AFB$; la demi roulette ſera nommée *Accourcie.*

COROLLAIRE VII.

11. SI le point touchant A, & le point décrivant D ſe mouvoient avec des viteſſes qui fuſſent telles que les puiſſances m des parties parcourues par le point A ſur AL, & les puiſſances n des parties parcourues dans des temps égaux par le point D ſur la demi circonference $DEG >, <,$ ou $= AFB$, gardaſſent entr'elles un raport conſtant, l'on pourroit avoir par ces mouvemens non ſeulement

toutes les roulettes dont on vient de parler: mais encore, une infinité d'autres de differens genres.

REMARQUE.

12. LES Roulettes & baſes droites, ſont toutes méchaniques : car une ligne droite ſe pouvant entendre à l'infini, le cercle mobile *AFB*, pourra faire une infinité de tours, ou gliſſer ſur cette ligne infinie *AL* pendant que le point décrivant *D*, parcourera une infinité de fois la circonference du cercle conſentrique *DGE* : mais la roulette décrite par le point *D* rencontrera à chaque tour, ou la ligne *AL*, ou une autre qui lui ſera parallele ; c'eſt pourquoi la ligne *AL* prolongée à l'infini, ou ſa parallele, rencontrera en une infinité de points la Roulette *DMS* qui ſera par conſequent méchanique.

Mais les Roulettes à baſes circulaires, ne ſont pas de même ; car lorſque les diametres du cercle immobile *ALT*, & du mobile *ABF* ſeront entr'eux, comme nombre à nombre, leurs circonferences ſeront auſſi comme nombre à nombre ; c'eſt pourquoi le point décrivant *D*, retombera au même point *S* aprés une ou pluſieurs révolutions, & ſi le cercle mobile continue de rouler, ou de gliſſer aprés ce tour au point *S*, le point *D* recommencera à décrire la même Roulette & partant un rayon *HM* tiré du centre *H*, la rencontrera en un certain nombre déterminé de points; alors la Roulette ſera geometrique, & l'on pourra trouver une équation qui ſervira à en déterminer tous les points geometriquement, comme on pourra voir dans un livre que *Monſieur Nicole* va donner au public ſur toutes les eſpeces de Roulettes, où il en expliquera tres-ſçavament toutes les proprietez.

Mais lorſque les diametres du cercle mobile, & du cercle immobile ſeront incommenſurables, le point décrivant ne retombera jamais dans un même point ; & en faiſant une infinité de tours autour du cercle immobile, décrira une infinité de Roulettes qui ne ſeront neanmoins qu'une même Courbe ; & partant un rayon tiré du cen-

tre

tre du cercle immobile rencontrera cette Courbe en une infinité de points, & elle ſera par conſequent méchanique.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

13. *IL faut décrire la courbe* BM *dont l'axe eſt* AP ; *une appliquée* PM, *& dont une des proprietez eſt que la ſoûtangente* PT *eſt toujours égale à une ligne donnée* KL. FIG. 109.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & mené l'appliquée *pm* infiniment proche de *PM* ; la ligne *MmT*, menée par les points *M*, *m* infiniment proches, ſera une tangente : car la courbe *BM*, étant regardée comme un polygone d'une infinité de côtez, *Mm* ſera un de ces côtez. Or il eſt clair que ſi la courbe *BM* eſt toujours convexe d'un même côté, le petit côté *Mm* étant prolongé, ne la coupera point, & le prolongement *MT* ſera par conſequent une tangente.

Ayant mené *mR* parallele à *AP*, *RM* ſera la difference des deux appliquées infiniment proches *PM* & *pm* ; c'eſt pourquoi on lui donnera le même nom qu'à *PM*, précedé de la lettre *d*, qui ſignfiera *difference*, & l'on n'employera point dans la ſuite la lettre *d* à d'autres uſages. Ainſi nommant l'appliquée *PM*, *y* ; *RM* ſera *dy*, c'eſt-à-dire, difference de *y* ; de ſorte que la lettre *d* ne fait que caracteriſer *y*, & n'eſt l'expreſſion d'aucune quantité : mais parce qu'il n'y a aucun point fixe ſur *AP*, pour pouvoir nommer l'intervale qui ſe trouveroit entre ce point fixe, & le point *P* par une autre inconnue, *x* ; on ſe contentera de nommer *Pp*, ou *Rm*, *dx* ; on nommera auſſi la donnée *KL*, ou (Hyp.) *PT*, *a* : or le petit triangle *MRm* étant regardé comme rectiligne à cauſe de l'infinie petiteſſe du petit côté *Mm*, ſera ſemblable au triangle *MPT* ; c'eſt pourquoi l'on aura *dy* (*MR*) . *dx* (*Rm*) :: *y* (*MP*) . *a* (*PT*), d'où l'on tire $ydx = ady$, qui eſt une équation differentielle.

14. Pour conſtruire les courbes qui ont de telles équa-

tions, il faut 1°. Que l'une des differences avec ſon inconnue, ſi elle s'y rencontre, ſoit dans un des membres de l'équation, & l'autre dans l'autre, & que les deux differences ſoient dans le numerateur, ſi l'équation eſt fractionnaire; ſelon cette regle l'équation précedente devient $dx = \frac{ady}{y}$.

2°. Qu'en multipliant ou diviſant l'équation, s'il eſt neceſſaire, par une quantité conſtante, chaque membre ſoit un plan dont chaque difference ſoit un côté. Ainſi l'équation $dx = \frac{ady}{y}$ deviendra $adx = \frac{aady}{y}$, en multipliant chaque membre par a.

3°. On égalera chaque membre à une nouvelle inconnue, aprés l'avoir diviſé par la difference qu'il renferme, & l'on aura par ce moyen deux équations à deux courbes geometriques, ou une équation à la ligne droite & l'autre à une courbe. Ainſi de l'équation précedente, on tire $a = z$, qui eſt une équation à la ligne droite, & $\frac{aa}{y} = f$, ou $aa = yf$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par rapport à ſes aſymptotes.

FIG. 110. 4°. Ayant mené deux lignes DQ, FP qui ſe coupent à à angles droits en A; on ſuppoſera que les quatre inconnues qui ſe trouvent dans l'équation differentielle, & dans les deux équations que l'on en a tirées, ont leur origine commune au point d'interſection A, de maniere que les deux inconnues de chaque équation ſe trouve ſur les deux lignes qui forment un même angle droit, c'eſt-à-dire, que ſi l'on nomme AP, x; & AQ, y; qui ſont les deux inconnues de l'équation differentielle précedente, il faudra neceſſairement nommer AF, f; & AD, z; afin que les inconnues y & f de l'équation à l'Hyperbole, forment un même angle droit FAQ, &c.

5°. On décrira par les regles des Sections 8, ou 11 les deux courbes geometriques, chacune dans l'angle, dont les côtez ſont exprimez par les inconnues de ſon équation.

Ainſi dans cet Exemple ; à cauſe de l'équation $aa = fy$ l'on décrira une Hyperbole NN dans l'angle FAQ, dont les côtez AQ, AF ſont nommez y & f, & à cauſe de l'équation $z = a$; ayant fait $AD = a = z$, l'on menera DS parallele à AP.

Avant que de venir à la conſtruction des équations differentielles, l'on remarquera, 1°. Qu'elles n'appartiennent pas toutes à des courbes méchaniques ; il y en a qui appartiennent à des courbes geometriques : mais l'art de les diſtinguer dépend du calcul inégal que nous ne pouvons pas expliquer ici. 2°. Que les inconnues dont les differences ſe trouvent dans une équation differentielle, expriment ou deux lignes droites, ou l'une exprime une ligne droite, & l'autre une ligne courbe, ce qui fait deux cas. La conſtruction de l'équation de ce Problême, & celle de l'équation du Problême qui ſuit, où toutes ces deux courbes ſont méchaniques, ſerviront d'Exemples pour l'un & pour l'autre cas.

15. Pour conſtruire l'équation $adx = \frac{aady}{y}$, l'on prendra ſur $AQ = y$ un point quelconque B, & l'on menera par B la droite BC parallele à AF qui rencontrera l'Hyperbole en C, & le point B ſera l'origine de la courbe qu'il faut décrire ; & ayant pris ſur AQ un autre point quelconque Q, l'on menera par Q la droite QN parallele à AF qui rencontrera l'Hyperbole en N. Cela fait, on prendra ſur DS le point V, tel qu'ayant mené VP parallele à AD, l'eſpace $ADVP$ ſoit égal à l'eſpace hyperbolique $BCNQ$; & le point M où les droites NQ, VP, étant prolongées, ſe couperont, ſera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

Ayant mené du point m pris ſur la courbe BM infiniment proche de M, les droites mqn, mpu, & du point N, la petite droite NI parallele à AQ ; QN étant f ; AQ, y ; Qq, ou NI ſera dy, & partant le petit rectan-

gle $QNIq = \int dy$; mais comme le petit triangle NIn a tous ſes côtez infiniment petits, il doit être nul par rapport au petit rectangle $QNIq$; c'eſt pourquoi $QNIq = QNnq = \int dy = \frac{aady}{y}$, en remettant pour $\int$ ſa valeur $\frac{aa}{y}$. De même AD, ou PV étant, a ; & AP, x ; Pp ſera, dx ; & partant le petit rectangle $PVup = adx$. Mais (Couſt.) $BCNQ = ADVP$, & $BCnq = ADup$; donc $QNnq = PVup$, ou en termes algebriques $\frac{aady}{y} = adx$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

16. IL eſt clair que la courbe BMm a pour aſymptote ſon axe AP: car l'eſpace Hyperbolique $BAFGC$ étant infini, le rectangle $ADVP$ ne lui peut jamais être égal, à moins qu'on ne ſuppoſe le point P infiniment éloigné de A.

COROLLAIRE II.

17. L'EQUATION $ydx = ady$, où l'Hypoteſe donne $dy . dx :: y . a$, d'où l'on voit que ſi l'on ſuppoſe que dx exprime une quantité conſtante, le rapport de dx à a ſera un rapport conſtant ; & partant celui de dy à y le
FIG. III. ſera auſſi ; c'eſt pourquoi ſi l'on prend ſur l'axe AP tant de parties égales qu'on voudra PC, CD, DE, &c. chacune $= dx$, & qu'on mene par les points P, C, D, E, &c. des perpendiculaires PM, CF, DG, EH, &c. ces perpendiculaires ſeront continuellement proportionnelles : car ayant mené par les points M, F, G, &c. Les droites MI, FK, GL, &c. l'on aura par l'Hypotheſe $PM(y) . IF(dy) :: CF . KG$; donc *componendo*, $PM . PM + IF :: CF . CF + KG$, c'eſt-à-dire, $PM . CF :: CF . DG$. Par la même raiſon $CF, DG :: DG . EH$, &c. De ſorte que ſi les parties de l'axe PC, PD, PE, &c. ou PN, PO, PQ, &c. priſes ſur l'axe AP en commençant d'un point quelconque P, croiſſent ou diminuent en proportion arithmeti-

que, les perpendiculaires correſpondantes CF, DF, EH, &c. ou NR, OS, QV, &c. croîtront, ou diminueront en proportion geometrique; c'eſt pourquoi ſi l'on prend PC pour l'unité de la progreſſion arithmetique PC, PD, PE, &c. & PM pour l'unité de la progreſſion geometrique PM, CF, DG, EH, les termes $PC(1)$, $PD(2)$, $PE(3)$, &c. de la progreſſion arithmetique, ſeront les logarithmes des termes correſpondans CF, DG, EH, &c. de la progreſſion geometrique, qu'on appelle *Nombres*, & 0, le Logarithme de l'unité PM. C'eſt à cauſe de cette proprieté que la courbe BM a été nommée *Logarithmique*.

COROLLAIRE III.

18. LA perpendiculaire PM étant nommée 1, ſi l'on nomme CF, x; DG ſera, x^2; EH, x^3; &c. car à cauſe de la progreſſion geometrique, l'on a $PM(1).CF(x) :: CF(x).DG = \frac{x^1}{1} = x^2$; $CF(x).DG(x^2) :: DG(x^2).EH = x^3$, &c. Par la même raiſon NR ſera, $\frac{1}{x}$; OS, $\frac{1}{x^2}$; QV, $\frac{1}{x^3}$; &c. car $CF(x).PM(1) :: PM(1).NR = \frac{1}{x}$; $PM(1).NR\left(\frac{1}{x}\right) :: NR\left(\frac{1}{x}\right).OS = \frac{1}{x^2}$; $NR\left(\frac{1}{x}\right).OS\left(\frac{1}{x^2}\right) : OS\left(\frac{1}{x^2}\right).QV = \frac{1}{x^3}$; &c. Or puiſque $PC = 1$, $PD = 2$, $PE = 3$, &c. PN ſera $= -1$, $PO = -2$, $PQ = -3$, *&c.* donc en rengeant ces expreſſions des perpendiculaires, & celles des parties de l'axe AP, de maniere que l'expreſſion de PQ réponde à celle de QV; celle de PO, à celle de OS, &c. l'on aura les deux progreſſions ſuivantes, qui ſe répondront terme à terme, & chaque terme de la progreſſion arithmetique, ſera le logarithme de celui qui lui répond dans la progreſſion geometrique.

Prog. geom. $\frac{1}{x^3} . \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^1} . 1 . x^1 . x^2 . x^3$, &c.

ou $x^{-3} x^{-2} x^{-1}$ $1 . x^1$ x^2 x^3, &c.

Prog. arith. $-3 . -2 -1 . 0 . 1 . 2 . 3$, &c.

COROLLAIRE IV.

19. D'où l'on voit, 1°. Que les expoſans des puiſſances en ſont les logarithmes. 2°. Que la ſomme de deux logarithmes, eſt le logarithme du produit des deux nombres qui leur répondent. Ainſi 5 ($= 3 + 2$) eſt le logar. de x^5 ($= x^3 \times x^2 = x^{3+2}$). 3°. Que la difference de deux logarithmes, eſt le logarithme du quotient des deux nombres qui leur répondent. Ainſi 2 ($= 5 - 3$) eſt le logarithme de x^2 ($= \frac{x^5}{x^3} = x^{5-3}$). 4°. Que le double, le triple, &c. d'un logarithme, eſt le logarithme du quarré du cube, &c. du nombre correſpondant. Ainſi 4 ($= 2 + 2$, eſt le logarithme de x^4) $= x^2 \times x^2 = x^{2+2}$. 5°. Que la moitié, le tiers, &c. d'un logarithme, eſt le logarithme de la racine quarrée, cube, &c. Ainſi 3 (égal à la moitié de 6,) eſt le logarithme de $x^3 = \sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}}$.

COROLLAIRE V.

20. IL ſuit auſſi des deux Corollaires précedens que le logarithme de la racine d'une puiſſance multipliée par l'expoſant de cette puiſſance ſera le logarithme de la même puiſſance, & qu'on peut par conſequent changer une puiſſance, ou une autre quantité quelconque en ſon logarithme, & au contraire : car en ſuppoſant les mêmes choſes que dans les Corollaires précedens $PC = 1$, étant le logarithme de $CF = x$; $PD = 2$ ($= 2PC = 2$ fois le Logarithme de $CF = x$), ſera le Logarithme de $DG = x^2$; $PE = 3$ ($3PC =$ trois fois le Logarithme de $PC = x$), ſera le Logarithme de x^3: ce qu'on exprime en cette ſorte : $L : DG$ (L ſignifie Logarithme) $= 2LCF$, ou $L : x^2 = 2Lx$; $L : EH = 3LCF$, ou $L : x^3 = 3Lx$. De même, $L : OS$ ($= -2PC$) $= -2LCF$, ou

$L : \frac{1}{x^2}$, ou $L : x^{-2} = -2Lx$; & en general $L : x^m = mLx$.

De même $L : ax = La + Lx$; $L : \frac{ax}{y} = La + Lx - Ly$; $L : ax - xx = La + x + Lx$; $L : aa - xx = La + x + La - x$; $L : axx - x^3 = 2Lx + La - x$.

Il n'eſt pas plus difficile de changer les quantitez logarithmiques en leurs nombres correſpondans : car il n'y a qu'à les élever à la puiſſance exprimée par leurs logarithmes, & multiplier celles qui ſont jointes par le ſigne +, & diviſer par celles qui ont le ſigne —. Ainſi $N : 3Lx$ (N. ſignifie Nombre) $= x^3$; $N : mLx = x^m$; $N : La + Lx - Ly = \frac{ax}{y}$; $N : 2Lx + La + x - 2La = \frac{axx + x^3}{aa}$.

Il en eſt ainſi des autres.

Parce que les logarithmes des quantitez égales, ſont auſſi égaux ; il ſuit qu'on peut changer les équations ordinaires en équations logarithmiques, & au contraire. Ainſi $yy = aa - xx$, qui eſt une équation au cercle, ſe change en celle-ci, $2Ly = La + x + La - x$, qui eſt une équation logarithmique. De même $2Ly = La + Lx$, qui eſt une équation logarithmique, ſe change en celle-ci $yy = ax$ qui eſt une équation à la parabole. Il en eſt ainſi des autres.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

18. *UN cercle* APB, *dont le centre eſt* C, *étant donné, il faut décrire la courbe* AMD *qui fait avec tous les rayons* CMP, Cmp, *un angle égal à un angle donné.* FIG. 112.

Il eſt clair que ſi l'on ſuppoſe que le rayon Cp ſoit infiniment proche de CP, & que l'on décrive du centre C, par m le petit arc mR, le petit triangle MRm pourra être regardé comme rectiligne ; c'eſt pourquoi ayant mené du centre C, la droite CT perpendiculaire à CP, & prolongé le petit côté Mm juſqu'à ce que le prolongement rencontre CT en T : la droite MmT, qui ſera une tangen-

te au point M, la perpendiculaire CT, qui ſera la ſoûtangente, & la partie CM du rayon CP formeront le triangle rectangle MCT ſemblable au petit triangle MRm, & qui ſera toujours ſemblable à lui-même, à cauſe de l'angle CMm, ou CMT égal à un angle donné. Suppoſons donc que le raport conſtant de MC à CT ſoit comme m à n.

Ayant nommé la donnée CA, ou CP, a; l'arc indéterminé AP, x; PM, y; Pp ſera dx; MR, dy, & CM, $a-y$. Or à cauſe des ſecteurs ſemblables CPp, CRm, l'on aura $CP\ (a).\ CM\ (a-y) :: Pp\ (dx).\ MR = \frac{adx-ydx}{a}$; & à cauſe des triangles ſemblables MRm, MCT, l'on a $MR\ (dy).\ RM\ (\frac{adx-ydx}{a}) :: MC\ (a-y).\ CT = \frac{aadx-2aydx+yydx}{ady}$: mais $m.\ n :: a-y\ (MC).\ \frac{aadx-2aydx+yydx}{adx}\ (CT)$; donc $n \times \overline{a-y} = m \times \overline{\frac{aadx-2aydx+yydx}{ady}}$, ou $n = m \times \frac{\overline{aax-ydx}}{ady}$, en diviſant chaque membre par $a-y$, ou (n°. 14.) $\frac{nady}{a-y} = mdx$, qui donne cette conſtruction.

Ayant ſuppoſé $m = z$, qui eſt une équation à la ligne droite, & $\frac{na}{a-y} = u$, qui eſt une équation à l'Hyperbole, on prolongera CA en F, en ſorte que $AF = m = z$, l'on menera par A la droite GH perpendiculaire à CA, & ayant nommé AG, x, & AH, u; l'on conſtruira l'Hyperbole HOS entre les aſymptotes CA & CB parallele à AH. D'un point quelconque O pris ſur l'Hyperbole, ayant mené OI parallele à AH, l'on prendra ſur AG le point G, en ſorte qu'ayant mené GK parallele à AF, le rectangle $AGKF$ ſoit égal à l'eſpace Hyperbolique $AIOH$, & ayant fait l'arc $AP = AG$, & mené le rayon GP, l'on décrira du centre C par I l'arc IM, qui coupera

CP

CP au point M qui ſera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené un rayon Cp infiniment proche de CP, qui coupera la courbe au point m; décrit du centre C par m l'arc mL; mené LQ parallele à IO, fait $Ag = Ap$, & mené gk parallele à GK. Par la conſtruction, l'eſpace $AgkF$ eſt égal à l'eſpace Hyperbolique $ALQH$, & $AGKF = AIOH$; donc $GgkK = ILQO$: mais $GgkK = zdx = mdx$, & $ILQO = ndy = \frac{nady}{a-y}$; donc $mdx = \frac{nady}{a-y}$ C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

19. IL eſt clair 1°. Que la courbe AMD ne paſſera point au centre C du cercle, puiſqu'elle coupe tous les rayons à angles égaux. 2°. Qu'elle fera une infinité de tours autour du même centre: car lorſque AG ſera égale à la circonférence $APBA$, le point M de la courbe ſera ſur le rayon CA: & comme l'eſpace Hyperbolique $HACBS$ eſt infini, avant que de l'avoir épuiſé, il faudra prendre ſur AG prolongée à l'infini, une infinité de fois $APBA$; c'eſt pourquoi la courbe AMD rencontrera une infinité de fois le rayon CA, & fera par conſequent une infinité de tours autour du centre C.

COROLLAIRE II.

20. ON tire de l'équation que l'on vient de conſtruire $mdx . ndy :: a . a-y$; d'où il ſuit que ſi l'on prend dx pour conſtante, ou ce qui revient au même, ſi les parties AP croiſſent également en devenant Ap, ou, croiſſent en proportion arithmetique, les appliquées PM, ou CM, ſeront (n°. 17.) en proportion geometrique; c'eſt pourquoi cette courbe eſt nommée *Logarithmique Spirale*.

REMARQUE.

21. SI l'on changeoit l'équation précedente $mdx = \frac{nady}{a-y}$ en celle-ci $adx = \frac{naady}{aa-my}$, en diviſant par m, & en multi-

pliant par a, ou $adx = \frac{aady}{a-y}$, en ſuppoſant $m=n$; aprés avoir conſtruit l'Hyperbole ſelon l'une de ces deux dernieres équations, on conſtruiroit la courbe AMD en prenant le ſecteur ACP égal à la moitié de l'eſpace hyperbolique $HAIO$, & le cercle décrit de C par I, couperoit CP au point M qui ſeroit à la courbe AMD ; & cette courbe ſeroit encore une Spirale logarithmique, qui auroit les mêmes proprietez que la précedente : car (Conſt.) le ſecteur $ACP = \frac{1}{2} AIOH$, & $ACp = \frac{1}{2} \times AL2H$; donc $PCp = \frac{1}{2} IL2Q$: mais $PCp = \frac{1}{2} adx$, & $\frac{1}{2} IL2Q = \frac{1}{2} \times \frac{naady}{ma-my}$, ou $\frac{1}{2} \times \frac{aady}{a-y}$; donc $adx = \frac{naady}{ma-my}$, ou $\frac{aady}{a-y}$.

La conſtruction de la courbe du Problême précedent ne dépend que de la quadrature de l'Hyperbole : mais celles des courbes de celui-ci dépend de la quadrature de l'Hyperbole, & de celle du cercle tout enſemble.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

22. *UN demi cercle* ADB, *dont le diametre eſt* AB, *& le centre* C, *étant donné ; il faut trouver un point* M *hors du demi cercle, d'où ayant abaiſſé ſur* AB *la perpendiculaire* MP *qui rencontrera la circonference* ADB *en* D ; *la partie* MD *de la perpendiculaire* MP *ſoit égale à l'arc* BD, *& que le rectangle* BP × PM *ſoit égal au quarré du demi diametre* BC.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée AC, ou CB, a ; & les indéterminées BP, x ; PM, y ; MD, f ; l'arc BD, u ; AP ſera, $2a - x$; l'on aura par la premiere condition du Problême, $f = u$, qui eſt (n°. 8.) une équation à la roulette à baſe droite, dont le point décrivant eſt ſur la circonference du cercle generateur ; & par la ſeconde condition, l'on aura $xy = aa$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes.

Pour conſtruire l'équation à la roulette $f = u$; ayant ſuppoſé que le point B de la circonference BDA, ſoit le point generateur, & mené AT perpendiculaire à AB, on fera rouler le demi cercle BDA ſur la droite AT qui le touche en A, & le point B décrira par ſon mouvement la roulette BMT.

Pour conſtruire l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, on menera le rayon CF parallele à AT, & l'on décrira (art. 14.) par le point F, l'Hyperbole FM qui coupera la roulette BMT au point cherché M.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par le point M la droite MP perpendiculaire à AB, ſa partie MD, compriſe entre le point M, & la circonference BDA, ſera par la proprieté de la roulette égale à l'arc BD, ce qui eſt en termes algebriques $f = u$.

Et par la proprieté de l'Hyperbole (art. 14.) le rectangle $BP \times PM = BC^2$, ce qui eſt en termes algebriques $xy = aa$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

PARCE QUE la roulette BMT eſt (n°. 12) une courbe méchanique ; il ſuit que la conſtruction de ce Problême eſt auſſi méchanique, quoique l'Hyperbole FM ſoit une courbe geometrique.

L'on remarquera auſſi que la conſtruction des Problêmes méchaniques ne differe point de celle des Problêmes geometriques, lorſqu'on les conſtruit par le moyen de deux équations indéterminées.

L'on pourroit trouver une équation differentielle pour la roulette, & la décrire par les régles expliquées dans la Propoſition quatriéme : car ayant mené par le point p, pris infiniment proche de P, la droite pSm parallele à PDM ; par les points D & M les petites droites DR, MI paralleles à AB ; MK parallele à DS, ou à la touchante en D du cercle BDA ; & le rayon CD. En-

nommant encore BP, x; PM, y; PD, z; & DM, f; BD, u; Pp, ou DR, ou MI ſera dx; RS, dz; IM, dy; KM, df; or puiſque l'arc $BD = DM$, & $BS = Sm$, l'on aura $DS = Km$, ou $df = du$.

A cauſe des paralleles DR, MI & DS, MK, les petits triangles DRS, MIK ſeront ſemblables & égaux; & partant $RS = dz = IK$; donc dy $(= IM = IK + Km = dz + df) = dz + du$, en mettant pour df ſa valeur du.

Mais les triangles rectangles DRS, DPC étant ſemblables, puiſque les angles RDS, PDC ſont tous deux le complement de l'angle RDC; l'on aura $DP\,(z) . PC\,(a - x) :: DR\,(dx) . RS = \frac{adx - xdx}{z} = dz$, & $DP\,(z) . DC\,(a) :: DR\,(dx) . DS = \frac{adx}{z} = du$; mettant donc dans l'équation précedente $dy = dz + du$, en la place de dz & du, leurs valeurs $\frac{adx - xdx}{z}$, & $\frac{adx}{z}$, l'on aura $dy = \frac{2adx - xdx}{z}$.

Enfin par la proprieté du cercle, l'on a $AP \times PB = PD^2$, ou en termes algebriques $2ax - xx = zz$; donc $z = \sqrt{2ax - xx}$, & mettant cette valeur de z dans l'équation $dy = \frac{2adx - xdx}{z}$, elle ſe changera en celle-ci $dy = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, qui eſt une équation differentielle, où il n'y a que deux indéterminées, & leurs differences.

L'on décrira (n°. 14 & 15.) par le moyen de cette équation, la roulette BMT, dont l'interſection M avec l'Hyperbole FM réſoudra le problême propoſé.

FIN.

De l'Imprimerie de JACQUES QUILLAU, Imp. Jur. Lib. de l'Un. rue Galande, prés la rue du Fouare.

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, le preſent Manuſcrit, & j'ai crû que la méthode & la clarté de cet Ouvrage, le rendroient fort utile. Fait à Paris ce 15 Juillet 1704.

Signé, FONTENELLE.

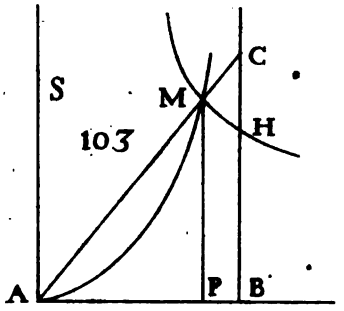
PRIVILEGE DU ROY.

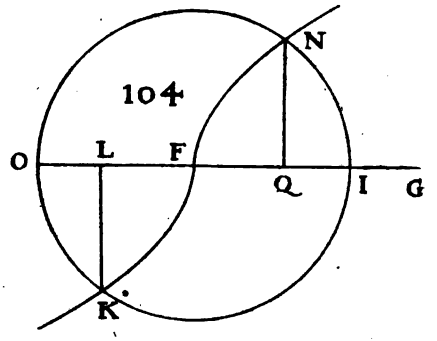
LOUIS par la grace de Dieu, Roi de France, & de Navarre; à nos Amez & Feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT; le ſieur GUISNE'E, de notre Academie Royale des Sciences, notre Profeſſeur de Mathematique au College Royal de Maître Gervais, & ancien Ingenieur, Nous ayant fait expoſer qu'il deſireroit faire part au Public d'un Ouvrage de ſa compoſition, intitulé *Application de l'Algebre à la Geometrie, ou les Lieux Geometriques, & la Conſtruction des Equations déterminées*, s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce neceſſaires: Nous avons permis, & permettons par ces Preſentes audit ſieur GUISNE'E, de faire imprimer ledit Livre en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre par tout notre Royaume, pendant le temps de ſix années conſecutives, à compter du jour de la date deſdites Preſentes; Faiſons défenſes à toutes perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles puiſſent être, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéïſſance, & à tous Imprimeurs, Libraires & autres, d'imprimer, faire imprimer & contrefaire ledit Livre en tout ni en partie, ſans la permiſſion expreſſe par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende

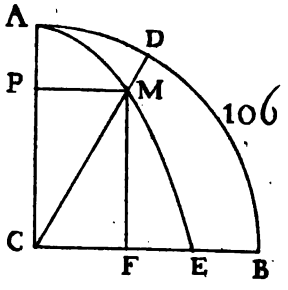
contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts : A la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris; & ce dans trois mois de la date d'icelles : Que l'Impreſſion dudit Livre sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs; & ce en bon papier, & en beaux caracteres, conformement aux Réglemens de la Librairie, & qu'avant que de l'expoſer en vente, il en sera mis deux Exemplaires dans notre Biblioteque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre tres-cher & Feal Chevalier Chancelier de France le ſieur PHELYPEAUX, Comte de Pontchartrain, Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des Preſentes : du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit l'Expoſant, ou ſes ayans cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement : voulons que la copie deſdites Preſentes, qui ſera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos Amez & Feaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoûtée comme à l'Original : Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent, de faire pour l'execution d'icelles, tous Actes requis & neceſſaires, ſans aucune permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Verſailles le vingt-quatriéme jour d'Aouſt, l'an de grace mil ſept cens quatre, & de notre Regne le ſoixante-deuxiéme. Par le Roy en ſon Conſeil.

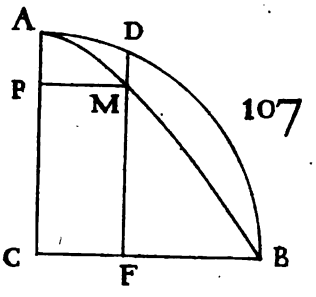
Signé, LE COMTE.

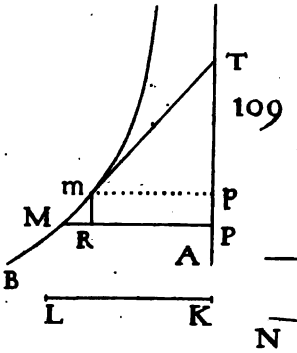
Regiſtré ſur le Livre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, numero 228. *page* 321. *conformement aux Reglemens, & notamment à l'Arrêt du Conſeil du* 13 *Aouſt* 1703. *A Paris ce* 2 *Septembre* 1704. Signé PIERRE EMERY, Syndic.

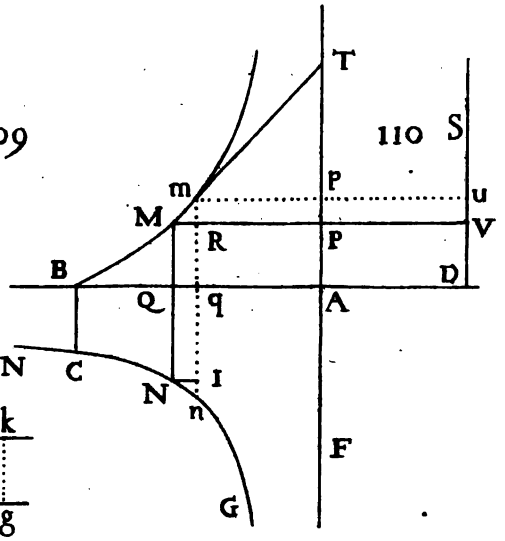


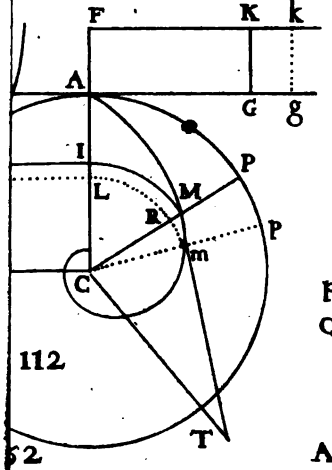


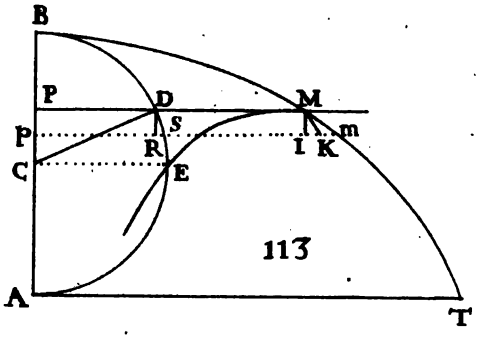








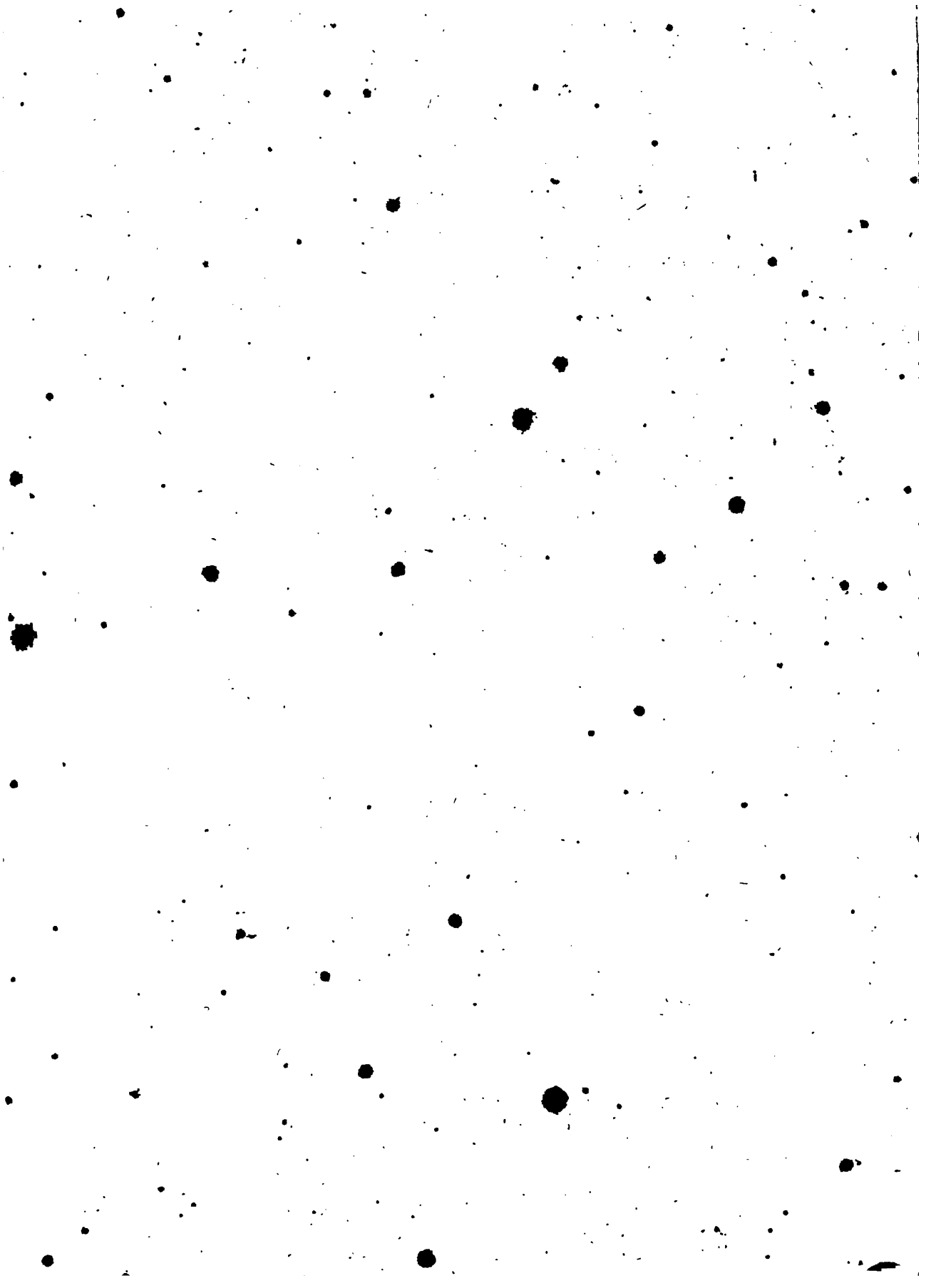
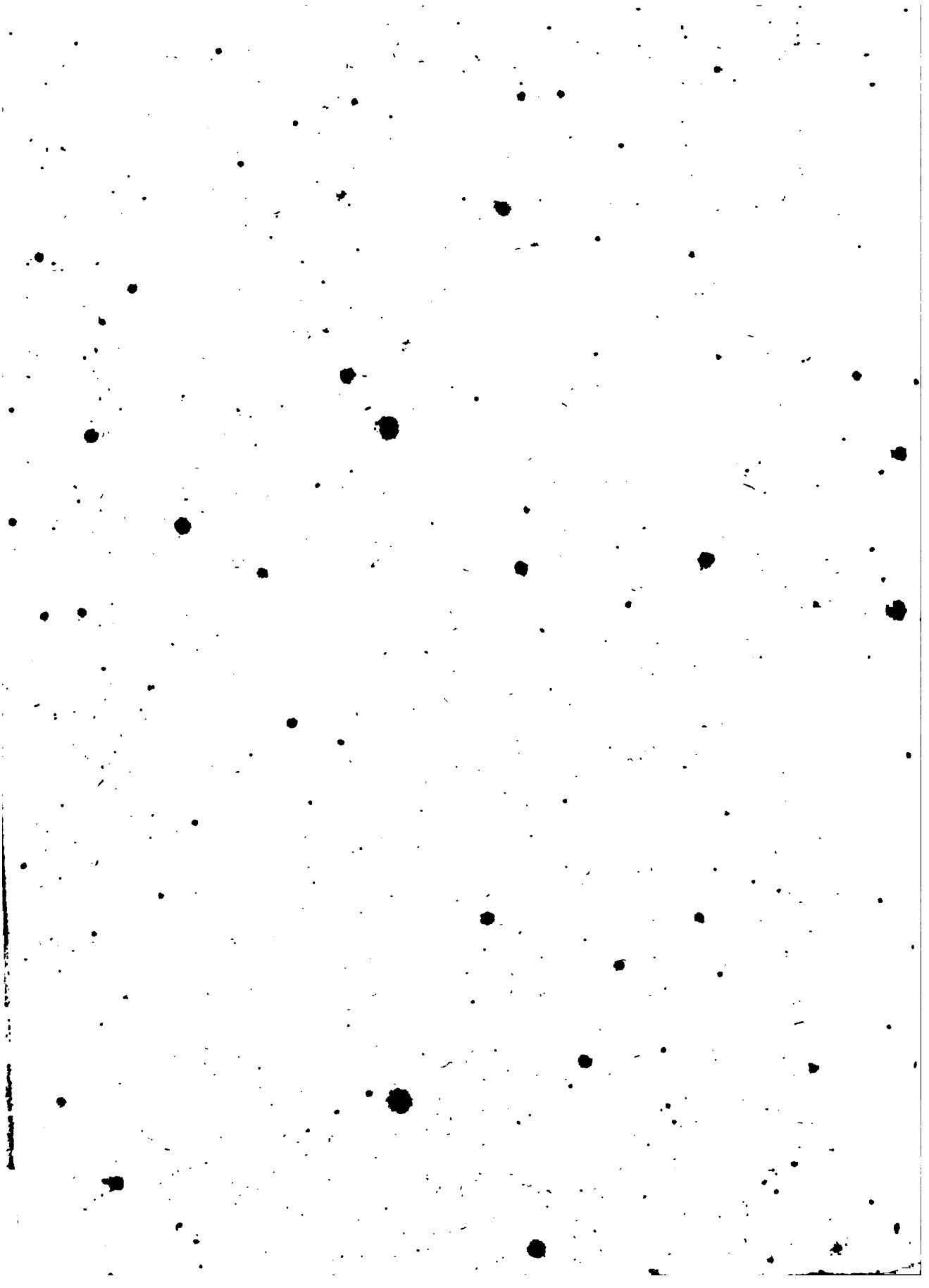
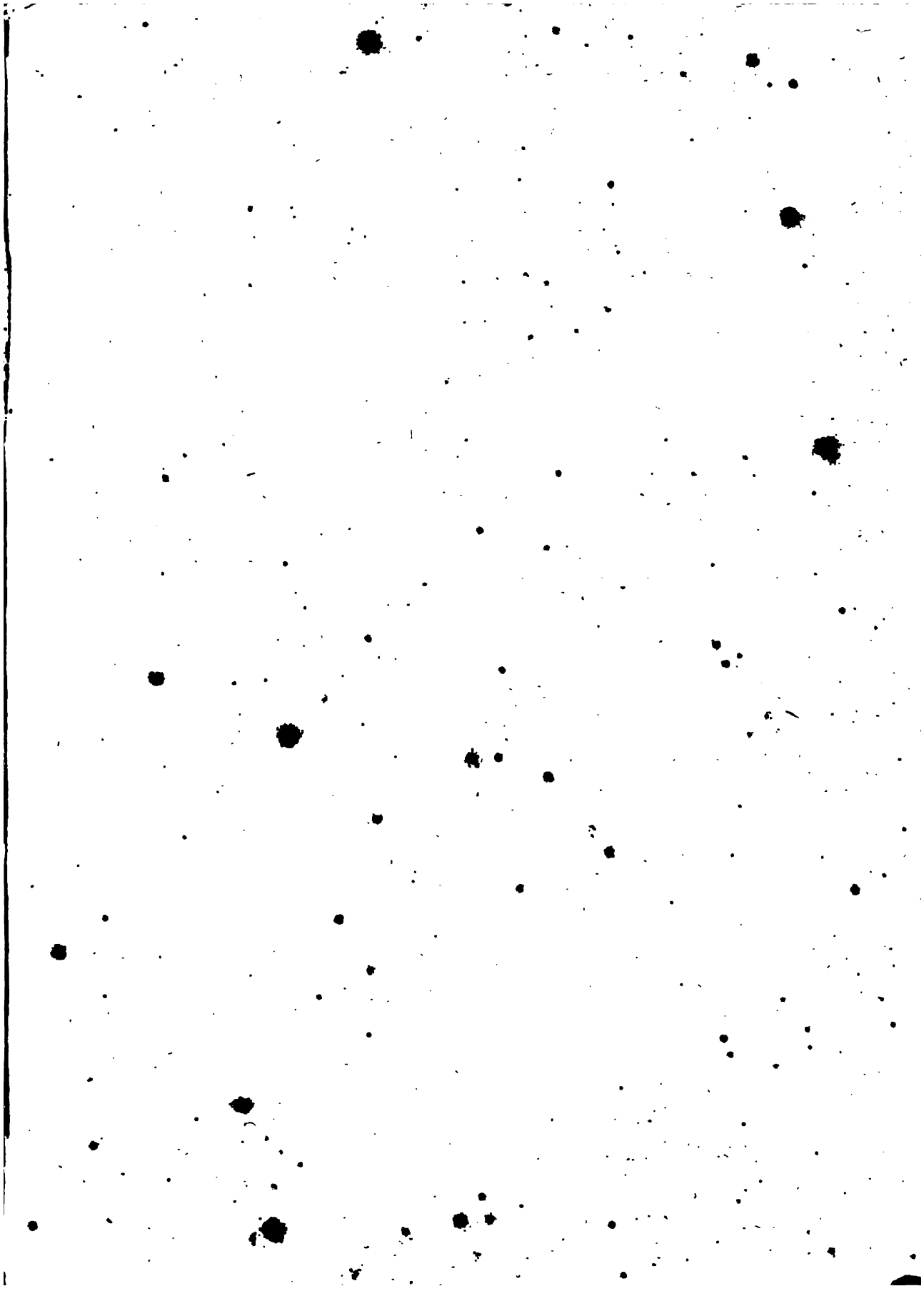




BRIT. OF MUSEUM

Fautes à corriger dans l'Introduction.

PAge v. *ligne* 13 & 14, $2a - 3b$, *liſez* $2a + 3b$. *Page* xlix *ligne* 4, de, *liſez* des. *Page* lij *ligne* 22, que *liſez* qui. *Page* liij *ligne* 8, ces, *liſez* les. *Page* liv *ligne* 7, *liſez* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. *Page* lvj *ligne* 15, $\frac{ab}{x}$, *liſez* $\frac{ab}{c}$. *Ibid. ligne* 17, ſeront, *liſez* ſont.

Dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

PAge 3 *ligne* 25, dénombrer, *liſez* démontrer. *Page* 4 *ligne* 7, à ces, *liſez* aſſez. *Page* 12 *ligne* 5 $ax =$, ou $x = 0\frac{0}{a} = 0$, *liſez* $ax = 0$, ou $x = \frac{0}{a} = 0$. *Ibid. ligne* 27 Lieu, *liſez* le Lieu. *Page* 52, *ligne* 18, *ajoutez* $- a^4yy$. *Page* 104 *ligne* 17, $\frac{aa - yy}{y}$, *liſez* $\frac{bb - yy}{y}$. *Page* 110 *ligne* 24, $\frac{2a}{p}$, *liſez* $\frac{2d}{p}$. *Page* 128 les aſymptotes, *liſez* les aſymptotes, étant donnée. *Page* 149 *ligne* 5, $\frac{m - n}{ma}$, *liſez* $\frac{ma}{m - n}$. *Ibid ligne* 20 $\frac{maa}{mm - 2mn + nn}$, *liſez* $\frac{mnaa}{mm - 2mn + nn}$. *Page* 141, *à la marge*, *liſez* V. art. 22. n°. 9. *Page* 160, *ligne* 23 $\frac{ay}{a}$, *liſez* $\frac{ay}{b}$. *Page* 189, *ligne* 26, *DC*, *liſez* *BC*, *Ibid ligne* 27, *DE*, *liſez* *DF*. *Page* 192, *G*, *liſez* *H*, & *H*, *liſez* *G*. *Page* 197, *ligne* 30, & du rayon *IA*, *liſez* & du rayon *IH*, que l'on déterminera en prolongeant *RA* en *H*, en ſorte que $AH = a$. *Page* 199 *ligne* 23, on trouvera, *liſez* on formera. *Page* 220 *ligne* 23, *AB* *liſez* *CD*. *Page* 201 *ligne* 9, *AB*, *liſez* *CD*. *Page* 202 *ligne* 6, *BDEC*, *liſez* *BDFC*. *Page* 203 *ligne* 13, *AH*, *liſez* *FAN*. *Page* 223, *ligne* 11, Coucoïde, *liſez* Concoïde. *Page* 225, *ligne* 23 uuit, *liſez* voit. *Page* 231, *ligne* 12, par *A*, *liſez* par *H*. *Page* 240, *ligne penultiéme* décrira, *liſez* il décrira. *Page* 248, *ligne derniere* *GP*, *liſez* *CP*.